پاسخ به یکی از سؤالات کتاب جبر و احتمال

کاری از: گروه ریاضی استان فارس

برای حل تعدادی از مسائل کتاب‌های ریاضی باید به یک دید وسیع‌تر و کلی‌تری رسید تا بتوان یک جواب مستدل و قابل قبول برای آن سؤال ارائه نمود.

یکی از این مسائل، مسأله‌ی شماره‌ی ۱۳، قسمت (پ) صفحه‌ی ۹۵ کتاب جبر و احتمال سال سوم ریاضی می‌باشد.

سؤال ۱۳ قسمت (پ) صفحه‌ی ۹۵

احتمال آمدن ۵ بار رو در پرتاب ۱۰ سکه بیش‌تر است یا احتمال آمدن ۱۰ بار رو در پرتاب ۲۰ سکه؟

برای پاسخ به این سؤال لازم است ابتدا به چندین سؤال در این رابطه پاسخ داد.

۱) کدامین جمله از دنباله‌ی

$$\binom{n}{۰},\binom{n}{۱},\binom{n}{۲},\binom{n}{۳},\dots,\binom{n}{n}$$

ماکزیمم مقدار را دارد؟

تابع $f: W \to N$ با ضابطه‌ی $p_x^{(n)}=\binom{n}{x}$ را درنظر می‌گیریم. با استفاده از مشتق گسسته خواهیم داشت:

$$p'(x)=\frac{\binom{n}{x}-\binom{n}{x-۱}}{x-(x-۱)}$$

$$p'(x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}-\frac{n!}{(x-۱)!(n-x+۱)!}$$

$$p'(x)=\frac{n!(n+۱-۲x)}{x!(n-x+۱)!}$$

$$p'(x)=۰ \Rightarrow x=\frac{n+۱}{۲}$$

چون $x\in W$ بنابراین اگر $\frac{n+۱}{۲}\in N$ نباشد در نظر می‌گیریم $x=\left[\frac{n+۱}{۲}\right]$ در این حالت n زوج است و جمله‌ی $\left[\frac{n+۱}{۲}\right]+۱$ ماکزیمم مقدار را دارد که جمله‌ی وسط دنباله می‌باشد.

و اگر $\frac{n+۱}{۲}\in N$ باشد، در این‌صورت n عددی فرد است و جمله‌ی $\frac{n+۱}{۲}$ ام و $\frac{n-۱}{۲}$ ام هر دو جملات وسط هستند و ماکزیمم مقدار دنباله را می‌دهند.

مثال (۱):

$n=۱۰$ داریم $\left[\frac{۱۰+۱}{۲}\right]+۱=۵+۱$ جمله‌ی ششم دنباله ماکزیمم مقدار را دارد.

$$a_۶=\binom{۱۰}{۵}=\frac{۱۰!}{۵!\times ۵!}=۲۵۲$$

مثال (۲):

$n=۱۱$ داریم $\frac{۱۱+۱}{۲}=۶$ جملات ششم و هفتم ماکزیمم مقدار هستند و با هم برابر.

$$a_۶=a_۷=\binom{۱۱}{۵}=\binom{۱۱}{۶}=۴۶۲$$

۲) در بسط دوجمله‌ای:

$$(a+b)^n=\sum_{x=۰}^{n}\binom{n}{x}a^x b^{n-x}\qquad a\,,\,b>۰$$

کدامین جمله ماکزیمم مقدار را دارد؟

با استفاده از تعریف مشتق گسسته خواهیم داشت:

$$f'(x)=\frac{f(x)-f(x-۱)}{x-(x-۱)}$$

$$f'(x)=\binom{n}{x}a^{x}b^{n-x}-\binom{n}{x-1}a^{x-1}b^{n-x+1}$$

$$f'(x)=a^{x-1}b^{n-x}\left(\binom{n}{x}a-\binom{n}{x-1}b\right)$$

$$f'(x)=a^{x-1}b^{n-x}\left(\frac{a(n+1)-(a+b)x}{x!(n+1-x)!}\right)\times n!$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{a(n+1)}{a+b}$$

x	0	$\frac{a(n+1)}{a+b}$	n
N	$+$	0	$-$
		max	

در این حالت هم چون $x \in W$ باید $x=\left[\frac{a(n+1)}{a+b}\right]$

مثال (۳):

در بسط $(1+2x)^{100}$ کدامین جمله ماکزیمم است؟

$$x=\left[\frac{1\times 101}{3}\right]=33$$

جمله‌ی سی و چهارم ماکزیمم است.

ضریب جمله‌ی سی و چهارم $=\binom{100}{33}2^{67}$

مثال (۴):

در بسط $(2x+1)^{98}$ کدامین جمله ماکزیمم است؟

$$x=\left[\frac{2\times 99}{3}\right]=66$$

جملات شصت و ششم و شصت و هفتم هر دو ماکزیمم هستند.

$$\binom{98}{65}2^{65}=\binom{98}{66}2^{66}$$

$$\frac{98!}{65!\times 33!}\times 2^{65}=\frac{98!}{66!\times 32!}\times 2^{66}$$

ضریب جمله‌ی ۶۷ام = ضریب جمله‌ی ۶۶ام

زیرا:

$$\frac{98!}{65!\times \underbrace{33\times 2}_{66}\times 32!}\times 2^{66}=\frac{98!}{66!\times 32!}\times 2^{66}$$

مثال (۵):

در بسط $(3x+2y)^{89}$ کدامین جمله ماکزیمم است؟

$$x=\frac{3\times 90}{5}=54$$

$$x=54\ ,\ x=53$$

ضریب جملات ۵۴ام و ۵۵ام برابرند. یعنی:

$$\binom{89}{53}3^{53}\times 2^{36}=\binom{89}{54}3^{54}\times 2^{35}$$

زیرا:

$$\frac{89!}{53!\times 36!}\times 3^{53}\times 2^{36}=\frac{89!}{53!\times 18\times 35!}\times 3^{53}\times 2^{35}=$$

$$\frac{89!}{53!\times 54\times 35!}\times 3^{54}\times 2^{35}=\frac{89!}{54!\times 35!}\times 3^{54}\times 2^{35}$$

۳) متغیر تصادفی y یک متغیر برنولی با تابع توزیع احتمال زیر است که $p(x=1)=p$ را احتمال پیروزی یا موفقیت و $p(x=0)=q$ را احتمال باخت یا شکست درنظر می‌گیرند.

x	0	1
$p(y=x)$	q	p

این متغیر تصادفی را n بار تکرار می‌کنیم و متغیر تصادفی X را تعداد پیروزی‌ها درنظر می‌گیریم. در این صورت تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی X :

$$p(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x} \qquad p+q=1$$

که $x\in\{0,1,2,\ldots,n\}$ تعداد پیروزی‌ها می‌باشد.

حال می‌خواهیم بدانیم متغیر تصادفی X در ازای کدام مقدار x ماکزیمم احتمال را دارد؟

با استفاده از مشتق متغیر گسسته خواهیم داشت:

$$p'(X=x)=\frac{p(X=x)-p(X=x-1)}{x-(x-1)}$$

$$p'(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}-\binom{n}{x-1}p^{x-1}q^{n-x+1}$$

$$p'(X=x)=p^{x-1}q^{n-x}\left(n!\frac{p(n+1)-x}{x!(n+1-x)!}\right)$$

x	0	$p(n+1)$	n
N	$+$	0	$-$
		max	

$$\Rightarrow \quad x = p(n+1)$$

ولی چون x عددی حسابی است، بنابراین $x = [p(n+1)]$ درنظر گرفته می‌شود.

مثال (۶):

به‌فرض $n = 7$ ، $p = \frac{1}{3}$

$$x_{max} = \left[\frac{8}{3}\right] = 2$$

$$p(X=2) = \binom{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{224}{729}$$

مثال (۷):

به فرض $n = 6$ و $p = \frac{3}{4}$

$$x_{max} = \left[\frac{3}{4}\times 7\right] = \left[\frac{21}{4}\right] = 5$$

$$p(X=5) = \binom{6}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{729}{2048}$$

مثال (۸):

به فرض $n = 6$ و $p = \frac{1}{2}$

$$x_{max} = \left[\frac{7}{2}\right] = 3$$

$$p(x=3) = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{5}{16}$$

حالت خاص (۱)

به فرض $x = (n+1)p \in N$ در این حالت $p(X=x)$ و $p(X=x-1)$ هر دو مساوی هستند و مقدار ماکزیمم احتمال را دارند.

$$p = \frac{x}{n+1}$$

$$q = 1 - p = 1 - \frac{x}{n+1}$$

$$q = \frac{n+1-x}{n+1}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{x}{n-x+1}$$

$$p(X=x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}$$

$$p(X=x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}\times\frac{p}{q}\times p^{x-1}\times q^{n-x+1}$$

$$= \frac{n!}{x!(n-x)!}\times\frac{x}{(n-x+1)}\times p^{x-1}\times q^{n-x+1}$$

$$= \frac{n!}{(x-1)!(n-x+1)!}\times p^{x-1}\times q^{n-x+1}$$

$$= p(X=x-1)$$

مثال (۹):

$p = \frac{1}{3}$ و $n = 5$

$$x_{max} = \frac{6}{3} = 2$$

$$p(X=2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$

$$p(X=1) = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{243}$$

مثال (۱۰):

$p = \frac{2}{3}$ و $n = 8$

$$x_{max} = \frac{2}{3}\times 9 = 6$$

$$p(X=x) = p(X=x-1) = \frac{1792}{6561}$$

حالت خاص (۲)

$x = \frac{n+1}{2} \in N$ و $p = \frac{1}{2}$

در این حالت n حتماً عددی طبیعی فرد است که جملات $p(X=x)$ و $p(X=x-1)$ هر دو مقدار ماکزیمم را تولید می‌کنند و

$$p(X=x) = p(X=x-1)$$

$$\binom{n}{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

حالت خاص (۴)

اگر $p=\frac{۱}{۲}$ و $x=p(n+۱)\notin N$ یعنی n عددی طبیعی زوج باشد، داریم:

$$x_{max}=\left[\frac{n+۱}{۲}\right]$$

$$n=۲k\ ,\ k=\frac{n}{۲}\ \Rightarrow\ x_{max}=k=\frac{n}{۲}$$

در این حالت دقیقاً جمله‌ی وسط مقدار ماکزیمم را دارد و داریم:

$$p(X=x)=\binom{n}{\frac{n}{۲}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^n$$

مثال (۱۱):

به فرض $n=۷$ و $p=\frac{۱}{۲}$ و $x=\frac{۸}{۲}=۴$:

$$p(X=۴)=p(X=۳)$$
$$=\binom{۷}{۴}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۷=\binom{۷}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۷=\frac{۳۵}{۱۲۸}$$

مثال (۱۲):

به فرض $n=۶$ و $p=\frac{۱}{۲}$

$$x=\left[\frac{۷}{۲}\right]=۳$$

$$p(X=۳)=\binom{۶}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۶=\frac{۲۰}{۶۴}=\frac{۵}{۱۶}=۳۱/۲۵\%$$

جدول توزیع احتمال (مثال ۱۱)

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$p(X=x)$	$\frac{۱}{۱۲۸}$	$\frac{۷}{۱۲۸}$	$\frac{۲۱}{۱۲۸}$	$\frac{۳۵}{۱۲۸}$	$\frac{۳۵}{۱۲۸}$	$\frac{۲۱}{۱۲۸}$	$\frac{۷}{۱۲۸}$	$\frac{۱}{۱۲۸}$

دو جمله‌ی وسط ماکزیمم احتمال را دارد. یعنی اگر سکه‌ای را ۷ بار پرتاب کنیم و متغیر تصادفی X تعداد روهای ظاهر شده باشد، بیش‌ترین احتمال برای متغیر تصادفی X احتمال آمدن ۳ بار رو و ٤ بار پشت یا ٤ بار رو و ۳ بار پشت است و هر دو با احتمال $\frac{۳۵}{۱۲۸}$.

جدول توزیع احتمال (مثال ۱۲)

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$p(X=x)$	$\frac{۱}{۶۴}$	$\frac{۶}{۶۴}$	$\frac{۱۵}{۶۴}$	$\frac{۲۰}{۶۴}$	$\frac{۱۵}{۶۴}$	$\frac{۶}{۶۴}$	$\frac{۱}{۶۴}$

یعنی اگر سکه‌ای را شش بار پرتاب کنیم و متغیر تصادفی X تعداد روهای ظاهر شده باشد، بیش‌ترین احتمال برای مقادیر متغیر تصادفی X احتمال آمدن سه بار رو و سه بار پشت است.

می‌دانیم فرمول تقریبی دموآسور - لاپلاس برای محاسبه‌ی $\binom{n}{x}p^xq^{n-x}$ به‌صورت زیر است:

$$\binom{n}{x}p^xq^{n-x}\cong\frac{۱}{\sqrt{۲n\pi pq}}e^{\frac{-(x-np)^۲}{۲npq}}$$

اگر $p=q=\frac{۱}{۲}$

$$\binom{n}{x}p^n\cong\frac{۲}{\sqrt{۲n\pi}}e^{\frac{-(۲x-n)^۲}{۲n}}$$

مثال (۱۳):

$n=۷$ و $p=\frac{۱}{۲}$ و ۳ یا $x=۴$

$$p(X=x)=\binom{۷}{۴}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۷\cong\frac{۲}{\sqrt{۱۴\pi}}e^{\frac{-۱}{۱۴}}\cong ۲۸/۷۸\%$$

در حالت خاص (۴) که $p=\frac{۱}{۲}$ و $x=\frac{n}{۲}\in N$ یعنی n عددی زوج باشد:

$$x_{max}=\frac{n}{۲}$$

$$p(X=x_{max})=\binom{n}{\frac{n}{۲}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^n\cong\frac{۲}{\sqrt{۲n\pi}}$$

مثال (۱۴):

در پرتاب ۲۰ سکه احتمال آمدن ۱۰ بار رو بیش‌ترین احتمال را دارد که:

$$x_{max}=\frac{۲۰}{۲}=۱۰$$

$$p(X=۱۰)=\binom{۲۰}{۱۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲۰}$$

$$p(X=۱۰)\cong\frac{۲}{\sqrt{۴۰\pi}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۰\pi}}=۱۷/۸۴\%$$

مثال (۱۵):

در پرتاب ۱۰ سکه احتمال آمدن ۵ بار رو بیش‌ترین احتمال را دارد.

$$p(X=۵)=\binom{۱۰}{۵}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}$$

$$p(X=۵)=\frac{۲}{\sqrt{۲۰\pi}}=\frac{۱}{\sqrt{۵\pi}}=۲۵/۲۳\%$$

مثال (۱۶):

در پرتاب ۲۰ سکه احتمال آمدن ۱۰ بار رو بیش‌تر است یا در پرتاب ۱۰ سکه احتمال آمدن ۵ رو؟

مسأله‌ی کتاب جبر و احتمال سوم ریاضی

در هر دو n زوج است و ۱۰ و ۵ نصف تعداد حالات پرتاب می‌باشند که مقدار ماکزیمم احتمال را می‌دهد.

$$n=۱۰\ \Rightarrow\ p(X=۵)=۲۵/۲۳\%$$

$$n=۲۰\ \Rightarrow\ p(X=۱۰)=۱۷/۸۴\%$$

$$\frac{p(X=۵)}{p(X=۱۰)}\cong\frac{\frac{۱}{\sqrt{۵\pi}}}{\frac{۱}{\sqrt{۱۰\pi}}}=\sqrt{۲}$$

در حقیقت احتمال آمدن ۵ بار رو در پرتاب یک سکه ۱۰ بار تقریباً $\sqrt{۲}$ برابر احتمال آمدن ۱۰ بار رو در پرتاب یک سکه ۲۰ بار می‌باشد.

و در حالت کلی احتمال آمدن m بار رو در پرتاب ۲m سکه با هم تقریباً $\sqrt{۲}$ برابر احتمال آمدن ۲m رو در پرتاب ۴m سکه است.

برگزیده از:

گاهنامه‌ی علمی آموزشی کارشناسی گروه‌های آموزشی متوسطه‌ی نظری استان فارس

(بهار اندیشه/ سال دوم/ شماره‌ی اول/ پاییز ۸۴)

***