فصل چهارم

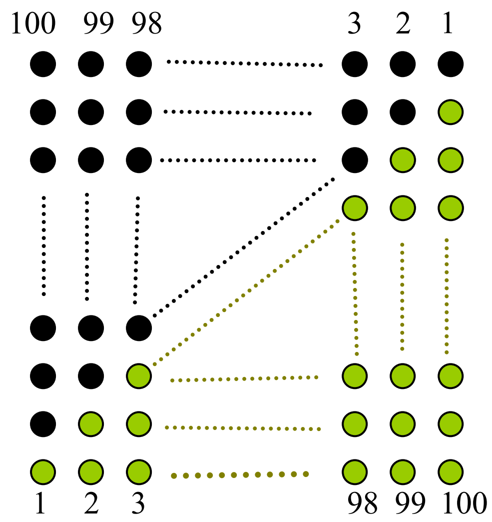
حد دنباله ها و بسط اعشاری اعداد

1. مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی
2. حد دنباله ها
3. بسط اعشاری اعداد حقیقی

مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی

گاوس یکی از دانشمندان ریاضی قرن هیجدهم است که داستان جالبی در زمان مدرسه خود دارد. یک روز معلم برای سرگرم کردن دانش آموزان از آنها می خواهد اعداد ۱ تا ۱۰۰ را با هم جمع بزنند و نتیجه را به دست آورند. در حالی که دانش آموزان مشغول این کار کسل کننده بودند، گاوس نتیجه را به سرعت به دست می آورد و به معلم ارائه می کند.

آیا شما هم می توانید این عمل جمع را به سرعت انجام دهید؟ شکل زیر می تواند ایده ای برای این کار به شما بدهد.



بحث در کلاس

از شکل بالا چگونه می توان استفاده کرد و جمع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را به دست آورد؟

تمرین در کلاس

۱- با استفاده از تجربیاتی که در بالا به دست آورده اید برای یک عدد طبیعی n نشان دهید:

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

۲- اگر جمله اول یک دنباله حسابی a و قدر نسبت آن d باشد، جملات آن به شکل زیرند:

$$a\,,\,a+d\,,\,a+2d\,,\cdots,\,a+nd\,,\cdots$$

نشان دهید مجموع n جمله اول این دنباله برابر است با $na+\frac{n(n-1)}{2}d$.

۳- نشان دهید $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

بحث در کلاس

می گویند یک روز حاکم شهری خواست به مخترع شطرنج جایزه ای بدهد و از او خواست خودش جایزه ای برای خودش تعیین کند. شطرنج ٦٤ خانه دارد و مخترع شطرنج گفت در خانه اول یک دانه گندم بگذارید و در خانه دوم ۲ گندم بگذارید و در خانه سوم ٤ گندم بگذارید و به همین ترتیب در هر خانه دوبرابر خانه قبل گندم بگذارید و نهایتا کل گندمها را به من بدهید. اگر هر دانه گندم یک گرم باشد، چند کیلو گندم جایزه مخترع شطرنج خواهد شد؟

این مسئله به نام مسئله شطرنج معروف است و ابوریحان بیرونی با روش خاص خود آن را حل کرده است. شما هم سعی کنید راه حلی برای آن بیابید.

حل یک مسئله

طول ضلع مربعی ۱۰ سانتی متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را رنگ می کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از مرحله قبل را رنگ می زنیم. پس از چند مرحله بیش از ۹۹ درصد مربع رنگ شده است.

مقداری از مربع (بر حسب سانتی متر مربع) که در هر مرحله رنگ می شود یک دنباله هندسی به شکل زیر تشکیل می دهد.

$$100\times\frac{1}{2}\,,\,100\times\frac{1}{4}\,,\,100\times\frac{1}{8}\,,\cdots,100\times(\frac{1}{2})^n\,,\cdots$$

بنابراین مقداری از مربع که پس از n مرحله رنگ می شود برابر است با

$$S_n=100\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+(\frac{1}{2})^n).$$

در فصل اول با چگونگی محاسبه این مجموع آشنا شده ایم و داریم:

$$S_n=100\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+(\frac{1}{2})^n)=\frac{100}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-1})$$

$$=\frac{100}{2}\,\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=100\times(1-(\frac{1}{2})^n)$$

باید نامعادله $99 \le 100(1-(\frac{1}{2})^n)$ را حل کنیم.

$$99 \le 100(1-(\frac{1}{2})^n)$$

$$99 \le 100 - \frac{100}{2^n}$$

$$\frac{100}{2^n} \le 1$$

$$100 \le 2^n$$

حداقل مقدار n که در این نامعادله صدق می کند ۷ می باشد، یعنی پس از مرحله هفتم بیش از ۹۹ درصد مربع رنگ شده است.

تمرین در کلاس

۱- برای یک عدد طبیعی n و یک عدد حقیقی q که $q \ne 1$ نشان دهید:

$$1+q+q^2 \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

۲- اگر جمله اول یک دنباله هندسی برابر a و قدر نسبت آن برابر q باشد، جملات این دنباله به شکل زیرند.

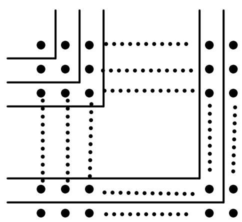
$$a\ , aq\ , aq^2\ , \cdots , aq^n\ , \cdots$$

نشان دهید در حالت $q \ne 1$ مجموع n جمله اول این دنباله برابر است با $a\frac{1-q^n}{1-q}$

مسائل

۱- در دنباله حسابی $5,8,11,\cdots$ حداقل چند جمله آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟

۲- به کمک شکل زیر نتیجه بگیرید $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.



۳- در مسئله شطرنج نشان دهید جایزه مخترع شطرنج بیش از ۱۰ میلیارد تن گندم خواهد شد.

٤- علی می خواهد پولهای خود را پس انداز کند. او روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می دهد و قرار می گذارد هر روز ۰/۹ پول روز قبل در صندوق، پول قرار دهد. پس از ۵۰ روز او چقدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوق او هیچگاه از ۱۰۰۰۰ تومان بیشتر نخواهد شد.

۵- فرض کنید که در انتشار یک ویروس سرماخوردگی در یک شهر هر روز هر فرد مبتلا یک نفر را بیمار می کند و در همان روز نیمی از مبتلایان سلامتی می یابند. اگر در روز اول ۲ نفر مبتلا باشند، پس از ۲۰ روز چند نفر مبتلا می شوند؟ اگر تعداد جمعیت شهر ۲۰۰۰۰۰۰ نفر باشد پس از چند روز همگان مریض می شوند؟

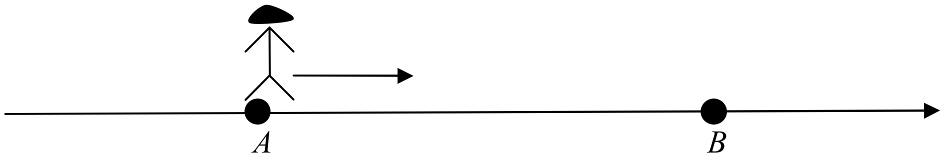
٦- برای محافظت از تابشهای مضر مواد رادیواکتیو لایه هایی محافظتی ساخته شده است که شدت تابشها پس از عبور از آنها نصف می شود. چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش بیابد؟

۷- فرض کنید که توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه یک سوم ارتفاع اولیه خود بالا می رود. اگر این توپ را از زمین به هوا پرتاب کنیم تا به ارتفاع یک متری برسد، در برخورد ۱۰۰ ام به زمین چقدر مسافت طی کرده است؟

حد دنباله ها

قبل از میلاد مسیح اندیشمندی در یونان می زیسته است که برای اثبات برخی تفکرات فلسفی، استدلالهایی را عرضه می داشت که طبق آنها برخی مشاهدات مستقیم ما را انکار می کرد. نام این اندیشمند زنون الیایی بود که حدود ٤۹۰ سال قبل از میلاد مسیح در یونان به دنیا آمده است. مشابه یکی از استدلالهای او برهانی است که بر طبق آن هیچ کس نمی تواند از یک طرف اتاق به طرف دیگر اتاق برود.

استدلال زنون: فرض کنید فردی می خواهد با سرعت ثابت از نقطه A به نقطه B برود.



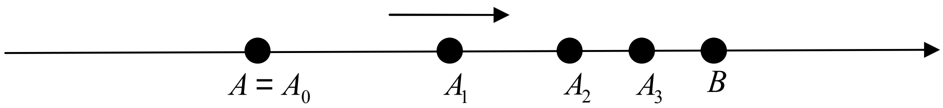
او ابتد باید نصف این مسیر را طی کند و سپس نصف باقیمانده مسیر را باید طی کند. با ادامه این روند این فرد باید از بینهایت نقطه رد بشود و برای رد شدن از یک نقطه به نقطه دیگر مدت زمانی را باید وقت صرف کند و جمع این زمانها بینهایت خواهد بود. بنابراین این فرد هیچگاه به نقطه B نمی رسد.

بحث در کلاس

آیا اشکالی در این استدلال می یابید؟ هر کس نظر خود را در مورد این استدلال بیان کند و سعی کند دلیل نادرستی این استدلال را بیابد.

فعالیت

فرض کنید در شکل بالا، فاصله نقطه A تا B برابر۱۰ متر و سرعت فرد ۱ متر بر ثانیه باشد. نقطه وسط A و B را A_1 ، نقطه وسط A_1 و B را A_2 و به همین ترتیب نقطه وسط A_n و B را A_{n+1} بنامید. نقطه A را نیز A_0 بنامید.



۱- فاصله نقطه A تا نقطه A_n چقدر است؟

۲- چه مدت طول می کشد تا فرد از نقطه A به نقطه A_n برسد؟ این زمان را t_n بنامید.

۳- با افزایش n نقطه A_n به چه نقطه ای نزدیک می شود؟ با افزایش n مقدارهای t_n به چه عددی نزدیک می شوند؟

۴- چه مدت طول می کشد تا فرد از نقطه A به نقطه B برسد؟

۵- آیا جوابهای بند(۳) و (٤) یکی هستند؟ چرا؟

در فعالیت بالا با دنباله $t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots$ روبرو شدیم که مقدارهای آن با افزایش n به عدد ۱۰ نزدیک می شوند و این نزدیک شدن به گونه ای است که فاصله t_n تا ۱۰ از هر عدد مثبتی که بخواهیم کمتر می شود به شرط آن که n به اندازه مناسب بزرگ باشد. در چنین شرایطی می گوییم دنباله $t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots$ همگرا است و حد آن برابر۱۰ است. به طور کلی

گوییم یک دنباله مانند $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ همگرا است و حد آن برابر عدد b است هر گاه فاصله x_n تا b از هر عدد مثبتی که بخواهیم کمتر شود به شرط آن که n به اندازه مناسب بزرگ باشد.

مثال: دنباله $1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ حد دارد و حد آن صفر است زیرا فاصله $\frac{1}{n}$ تا صفر از هر عدد مثبتی که بخواهیم کمتر می شود. مثلا برای آن که فاصله $\frac{1}{n}$ تا صفر از ۰/۱ کمتر شود کافی است n از ۱۰ بزرگتر شود. یا برای آن که که فاصله $\frac{1}{n}$ تا صفر از ۰/۰۱ کمتر شود کافی است n از ۱۰۰ بزرگتر شود.

مثال: دنباله $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$ حد دارد و حد آن ۱ است زیرا فاصله $\frac{n}{n+1}$ تا ۱ از هر عدد مثبتی که بخواهیم کمتر می شود، زیرا $\frac{1}{n+1} = 1 - \frac{n}{n+1}$. مثلا برای آن که فاصله $\frac{n}{n+1}$ تا ۱ از ۰/۱ کمتر شود کافی است n از ۹ بزرگتر شود. یا برای آن که که فاصله $\frac{n}{n+1}$ تا ۱ از ۰/۰۰۱ کمتر شود کافی است n از ۹۹۹ بزرگتر شود.

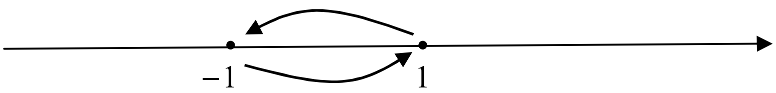
مثال: اگر q عددی باشد که $|q|<1$ دنباله $1, q, q^2, \cdots, q^n, \cdots$ حد دارد و حد آن صفر است زیرا با توان رسانی اعدادی که قدر مطلق آنها کمتر از ۱ است این اعداد مرتبا کوچک می شوند و فاصله آنها از صفر از هر عدد مثبتی کمتر می شوند.

برای سادگی از این به بعد برای نمایش دنباله هایی مانند $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ از نمادگذاری $\{x_n\}$ استفاده می کنیم. توجه کنید نماد $\{x_n\}$ به معنی مجموعه نیست و منظور از آن دنباله $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ است.

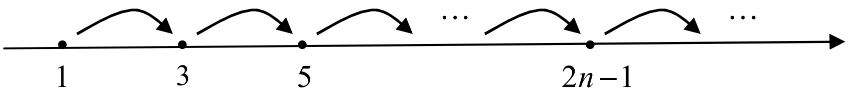
مثال: منظور از $\{2n-1\}$ دنباله $1\,, 3, 5, \cdots, 2n-1, \cdots$ است.

مثال: $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ دنباله $1, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n^2}, \cdots$ را نشان می دهد.

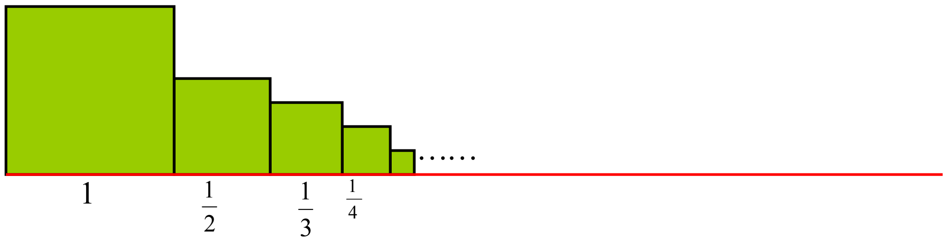
این طور نیست که هر دنباله ای حد داشته باشد و در بسیاری از دنباله ها جمله عمومی آنها به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی شود. برای مثال دنباله $\{(-1)^n\}$ که جملات آن به صورت $1\,, -1\,, 1\,, \cdots\,, (-1)^n\,, \cdots$ است، حد ندارد زیرا جمله عمومی آن مرتبا ۱ و ۱- می شود و به هیچ عددی نزدیک نمی شود.



به عنوان مثالی دیگر دنباله اعداد فرد $\{2n-1\}$ حد ندارد، زیرا مقدارهای این دنباله مرتبا در حال افزایش هستند و از هر مقداری بزرگتر می شوند و به هیچ عدد خاصی نمی توانند نزدیک شوند.



مثال: دنباله ای از مربعها را در نظر بگیرید که طول اضلاع آنها به ترتیب $1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ باشد و آنها را به ترتیب پهلوی هم بگذارید.



مجموع مساحت این مربعها حد دنباله $S_n = 1 + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{n^2}$ است. در ریاضیات سطح بالاتر ثابت می شود این دنباله همگرا است و حد آن $\frac{\pi^2}{6}$ است. مجموع طول اضلاع این مربعها حد دنباله $P_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n}$ است و می توان ثابت کرد که این دنباله همگرا نیست و مقدار P_n با افزایش n از هر مقداری بزرگتر می شود.

تمرین در کلاس

۱- $\{a\}$ چه دنباله ای را نشان می دهد؟ آیا این دنباله همگرا است؟

۲- فاصله جملات دنباله $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$ را تا ۲ حساب کنید و نشان دهید این دنباله همگر است و حد آن ۲ است. n از چه عددی باید بزرگتر شود تا فاصله جمله nام این دنباله تا ۲ از ۰/۰۰۰۱ کمتر شود؟

۳- چند جمله از دنباله $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ را بنویسید و روی محور اعداد نشان دهید. آیا این دنباله همگرا است؟ این دنباله چگونه به حد خود نزدیک می شود؟

۴- توضیح دهید که چرا دنباله $\{\sqrt{n}\}$ همگرا نیست.

فعالیت

توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه یک چهارم ارتفاع اولیه خود بالا می رود. فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده ایم تا به ارتفاع ۵ متری برسد.

۱. در زمان اولین برخورد و دومین برخورد با زمین توپ چه مسافت هایی را طی کرده است؟
۲. در زمان nامین برخورد با زمین توپ چه مسافتی را طی کرده است؟
۳. در زمانی که توپ نهایتا می ایستد، توپ چه مقدار مسافت طی کرده است؟

در فعالیت بالا با یک دنباله هندسی روبرو بوده ایم که باید مجموع n جمله اول آن را حساب می کردیم و بررسی می کردیم که آیا این مجموع با افزایش n به عدد خاصی نزدیک می شود.
یک دنباله هندسی با جمله اول a و قدرنسبت q به شکل $\{aq^{n-1}\}$ است و مجموع n جمله اول آن به شرط $q \neq 1$ به شکل زیر است.

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

در حالتی که $|q|>1$، با افزایش n مقدار q^n از لحاظ قدرمطلق در حال افزایش است و از هر مقداری بزرگتر می شود، بنابراین در این حالت دنباله $\{S_n\}$ همگرا نیست.
اما اگر $|q|<1$، با افزایش n مقدار q^n به صفر نزدیک می شود و دنباله $\{S_n\}$ همگرا است و حد آن $\frac{a}{1-q}$ است.

در دنباله هندسی $a, aq, aq^2, \cdots, aq^{n-1}, \cdots$ در حالتی که $|q|<1$ حد مجموع $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$ برابر است با $\frac{a}{1-q}$.

مثال: طبق قانون جاذبه، در شرایط صرفنظر کردن از مقاومت هوا، جسمی که از ارتفاع h(بر حسب متر) رها می شود تقریبا $\sqrt{\frac{h}{5}}$ ثانیه طول می کشد تا به زمین برسد. و برعکس اگر جسمی از زمین به هوا پرتاب شده باشد و حداکثر به ارتفاع h(بر حسب متر) برسد، مدت حرکت $\sqrt{\frac{h}{5}}$ ثانیه خواهد بود. می خواهیم بدانیم توپی که در فعالیت بالا از آن صحبت کرده ایم از لحظه شروع پرتاب چقدر طول می کشد تا بایستد.

ارتفاع توپ قبل از nامین برخوردبا زمین را A_n می نامیم. روشن است که

$$A_1 = 5 \, , \, A_2 = \frac{5}{4} \, , \, A_3 = \frac{5}{16} \, , \cdots , \, A_n = \frac{5}{4^{n-1}} \, , \cdots$$

مدت زمانی که طول می کشد توپ به ارتفاع A_n برسد و برگردد برابر است با

$$t_n = 2\sqrt{\frac{A_n}{5}} = 2\sqrt{\frac{5}{5\times 4^{n-1}}} = 2(\frac{1}{2})^{n-1}$$

بنابراین پس از لحظه شروع پرتاب توپ، مدت زمانی که طول می کشد که توپ به برخورد nام به زمین برسد برابر است با

$$T_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 2(1 + \frac{1}{2} + \cdots + (\frac{1}{2})^{n-1}) = 2\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 4(1-(\frac{1}{2})^n)$$

مدت زمانی که طول می کشد تا توپ بایستد حد دنباله $\{T_n\}$ است و این دنباله همگراست و حد آن ٤ است. یعنی حرکت توپ ٤ ثانیه پس از شروع پرتاب به پایان می رسد.

فعالیت

۱. دو دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ و $\left\{2+\frac{1}{n}\right\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید این دو دنباله همگرا هستند و حد آنها را تعیین کنید. اختلاف بین حد این دو دنباله چقدر است؟

۲. دو دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ و $\left\{a+\frac{1}{n}\right\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید این دو دنباله همگرا هستند و حد آنها را تعیین کنید. اختلاف بین حد این دو دنباله چقدر است؟

۳. اگر $\{x_n\}$ دنباله ای همگرا و حد آن L باشد، در مورد همگرایی و حد دنباله $\{a+x_n\}$ چه حدسی می زنید؟ استدلالی برای درستی حدس خود ارائه کنید.

از فعالیت بالا نتیجه می شود:

اگر $\{x_n\}$ دنباله ای همگرا و حد آن L باشد، برای هر عدد a دنباله $\{a+x_n\}$ نیز همگرا است و حد آن $a+L$ است.

مثال: همگرایی و حد دنباله $\left\{\frac{n+1}{n+2}\right\}$ را بررسی می کنیم. داریم

$$\frac{n+1}{n+2}=\frac{n+2-1}{n+2}=1-\frac{1}{n+2}$$

از آنجا که دنباله $\left\{-\frac{1}{n+2}\right\}$ حد صفر دارد، دنباله بالا حد ۱ خواهد داشت.

فعالیت

۱. دو دنباله همگرای $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ و $\left\{\frac{2n+2}{n}\right\}$ را در نظر بگیرید. جملات این دو دنباله چه رابطه ای با هم دارند؟ حد این دو دنباله چه رابطه ای با هم دارند؟

۲. دو دنباله همگرای $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ و $\left\{\frac{a(n+1)}{n}\right\}$ را در نظر بگیرید جملات این دو دنباله چه رابطه ای با هم دارند؟ حد این دو دنباله چه رابطه ای با هم دارند؟

۳. اگر $\{x_n\}$ دنباله ای همگرا و حد آن L باشد، در مورد همگرایی و حد دنباله $\{ax_n\}$ چه حدسی می زنید؟ استدلالی برای درستی حدس خود ارائه کنید.

از فعالیت بالا نتیجه می شود:

اگر $\{x_n\}$ دنباله ای همگرا و حد آن L باشد، برای هر عدد a دنباله $\{ax_n\}$ نیز همگرا است و حد آن aL است.

مثال: همگرایی و حد دنباله $\left\{\frac{n}{5n+1}\right\}$ را بررسی می کنیم. داریم

$$\frac{n}{5n+1}=\frac{1}{5}\times\frac{5n}{5n+1}=\frac{1}{5}\times\frac{5n+1-1}{5n+1}=\frac{1}{5}(1-\frac{1}{5n+1})$$

با افزایش n جملات داخل پرانتز به ۱ نزدیک می شوند، پس حد دنباله بالا $\frac{1}{5}$ است.

تمرین در کلاس

۱. اگر $\{x_n\}$ یک دنباله باشد، دنباله $\{x_{n+1}\}$ چه تفاوتی با آن دارد؟ توضیح دهید که چرا اگر یکی از این دو دنباله همگرا باشد دیگری هم همگراست و حد آنها مساوی است.

۲. اگر $\{x_n\}$ دنباله همگرایی باشد و برای هر n داشته باشیم $10x_{n+1}=10+x_n$، نشان دهید حد این دنباله $\frac{10}{9}$ است.

مسائل

۱- نشان دهید دنباله های زیر همگرا هستند و حد آنها را تعیین کنید.

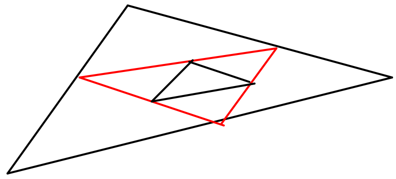
الف) $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ ب) $\left\{\frac{3n^2}{n^2+2}\right\}$ ج) $\left\{\frac{n+(-1)^n}{2n}\right\}$

۲- توضیح دهید که چرا دنباله های زیر همگرا نیستند.

الف) $\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}$ ب) $\left\{(-1)^n\frac{n+1}{n}\right\}$ ج) $\left\{\frac{n}{\sqrt{1+n}}\right\}$

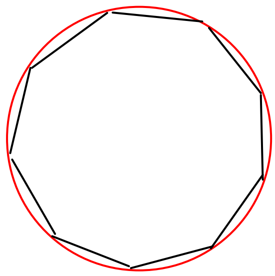
۳- بادکنکی کروی را در هر مرحله باد کردن یک سانتی متر مکعب به حجم آن اضافه می کنیم. شعاعهای این بادکنک در هر مرحله چقدر است؟ آیا دنباله شعاعهای بادکنک همگرا است؟ اگر در هر مرحله ۹۹ درصد مرحله قبل بادکنک را باد کنیم و در اولین مرحله بادکنک خالی بوده و آن را یک سانتیمتر مکعب باد کرده باشیم دنباله حجمهای باد کنک را بنویسید. آیا این دنباله همگراست؟ حد آن چیست؟ د مورد دنباله شعاعهای بادکنک چه می توانید بگویید و حد آن چیست؟

۴- یک مثلث با محیط P و مساحت S در نظر بگیرید. وسطهای اضلاع آن را به هم وصل می کنیم و مثلث کوچکتر جدیدی بسازید. این عمل را مجددا روی مثلث کوچکتر انجام دهید. این عملیات را به طور متوالی ادامه دهید.



مجموع محیط مثلثهای به دست آمده چقدر است؟ . مجموع مساحت مثلثهای به دست آمده چقدر است؟

۵- محیط یک دایره به شعاع R را به n قسمت مساوی تقسیم می کنیم و با نقاط به دست آمده یک n-ضلعی منتظم می سازیم. محیط این n-ضلعی را با P_n و مساحت آن را با S_n نشان می دهیم. آیا دنباله های $\{P_n\}$ و $\{S_n\}$ همگرا هستند؟ حد آنها چیست؟ مقدارهای P_n و S_n را حساب کنید. چه نتیجه ای می توانید بگیرید؟



٦- اگر $\{a_n\}$ دنباله همگرایی باشد و برای هر n داشته باشیم $100a_n = 452 + a_n$ حد این دنباله چقدر است؟

بسط اعشاری اعداد حقیقی

در سالهای قبل با اعداد اعشاری و دنباله تقریبات اعشاری اعداد حقیقی آشنا شده اید. برای مثال $0/3, 0/33, 0/333, \cdots$ دنباله تقریبات اعشاری $\frac{1}{3}$ است، و می دانید که جملات این دنباله به $\frac{1}{3}$ نزدیک می شوند، یعنی این دنباله همگرا است و حد آن $\frac{1}{3}$ است.

به طور کلی جملات دنباله تقریبات اعشاری هر عددی مانند a به خود a نزدیک می شوند و این نزدیک شدن به گونه ای است که فاصله تقریبات اعشاری a از a از هر عددی کوچکتر می شود. این به معنای آن است که دنباله تقریبات اعشاری هر عددی مانند a به a همگرا است. اگر a عددی در بازه $[0,1]$ باشد و دنباله تقریبات اعشاری آن به صورت $\{0/d_1d_2\cdots d_n\}$ باشد بنا به قرارداد، حد این دنباله را به صورت $0/d_1d_2\cdots d_n\cdots$ نشان می دهیم که همان a است، پس

$$a = 0/d_1 d_2 \cdots d_n \cdots$$

عبارت بالا را بسط اعشاری a می نامند. برای مثال

$$\frac{1}{3} = 0/33\cdots 3\cdots \qquad , \qquad \frac{2}{11} = 0/181818\cdots 18\cdots$$

عبارت $0/33\cdots 3\cdots$ بسط اعشاری $\frac{1}{3}$ و عبارت $0/1818\cdots 18\cdots$ بسط اعشاری $\frac{2}{11}$ است.

برای اعداد حقیقی مثبت دلخواه ابتدا قسمت صحیح آن را کنار می گذاریم و بسط اعشاری باقیمانده را که عددی در فاصله $[0,1]$ به دست می آوریم. اگر قسمت صحیح عدد حقیقی b برابر m باشد و $b = m + a$ و بسط اعشاری a به صورت $0/d_1 d_2 \cdots d_n \cdots$ باشد، می نویسیم

$$b = m/d_1 d_2 \cdots d_n \cdots$$

عبارت $m/d_1 d_2 \cdots d_n \cdots$ را بسط اعشاری b می نامند و b حد دنباله $\{m/d_1 d_2 \cdots d_n\}$ است. برای مثال

$$\frac{19}{3} = 6/33\cdots 3\cdots \qquad , \qquad \frac{35}{11} = 3/181818\cdots 18\cdots$$

در مثالهای بالا دیدیم که بسط اعشاری اعداد گویا الگوی ساده ای دارد و همواره قسمتی در این بسط وجود دارد که از مرحله ای به بعد تکرار می شود. آن بسط های اعشاری را که قسمت تکرار شونده دارند، بسط های متناوب می نامیم.

تمرین در کلاس

نشان دهید بسط اعشاری اعداد $\frac{97}{45}$, $\frac{611}{4950}$, $\frac{2783}{180}$ متناوب است و قسمت تکرار شونده آن را بیابید.

حل یک مسئله

آیا هر بسط اعشاری متناوبی یک عدد گویا را نشان می دهد؟ چگونه این عدد گویا را پیدا کنیم؟

معلم: بهتر است اول این مسئله را در یک حالت خاص حل کنیم. مثلا ببینیم که آیا می توانیم عددی را بیابیم که بسط اعشاری آن ... ۵...۰/۵۵۵ باشد؟

زهرا: بنا به تعریف این عدد باید حد دنباله

$$0/5\,,\,0/55\,,\,0/555\,,\cdots$$

باشد. بنابراین باید ببینیم جملات این دنباله به چه عددی نزدیک می شوند.

مریم: اما ما چگونه می توانیم تشخیص دهیم که حد این دنباله چیست. شاید این دنباله اصلا حد نداشته باشد.

معلم: آیا می توانید این دنباله را به شکل دیگری بنویسید؟

زهرا: جمله nام این دنباله را می توانیم به شکل زیر بنویسیم:

$$0/55\cdots5=\frac{5}{10}+\frac{5}{100}+\cdots\frac{5}{10^n}$$

مریم: این عبارت همان مجموع جملات دنباله هندسی با جمله اول $\frac{5}{10}$ و قدر نسبت $\frac{1}{10}$ است و ما می دانیم حد این مجموع $\frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}}$ است، یعنی آن دنباله همگرا است و حد آن $\frac{5}{9}$ است.

معلم: بنابراین ... ۵...۰/۵۵۵ بسط اعشاری $\frac{5}{9}$ است. حال به مسئله اصلی برگردیم. اگر به جای رقم ۵ رقم دیگری را در نظر می گرفتیم، آیا استدلال بالا را مجددا می توانیم تکرار کنیم؟

زهرا: بله این استدلال بدون کوچکترین تغییری قابل تکرار است و اگر a یکی از ارقام ۱، ۲، ... ، ۹ باشد $0/aa\cdots a\cdots$ بسط اعشاری $\frac{a}{9}$ است.

معلم: حالا مسئله را در حالتی کنید که قسمت تکرار شونده دو رقمی باشد. مثلا بسط اعشاری $0/3737\cdots37\cdots$ را در نظر بگیرید. آیا عددی هست که این عبارت بسط اعشاری آن باشد؟

زهرا: باید حد دنباله $\cdots\,,\,0/373737\,,\,0/3737\,,\,0/37$ را بیابیم.

مریم: آیا نمی توانیم مشابه استدلال قبلی جمله عمومی این دنباله را به صورت مجموع جملات یک دنباله هندسی بنویسیم؟

معلم: شما چه پیشنهادی برای این عمل دارید؟

مریم: مثلا دو رقم دو رقم از دنباله بالا جدا کنیم. در این صورت می توانیم بنویسیم:

$$0/37 = \frac{37}{100}$$
$$0/3737 = \frac{37}{100} + \frac{37}{10000}$$
$$\vdots$$
$$0/3737\cdots37 = \frac{37}{100} + \frac{37}{10000} + \cdots + \frac{37}{100^n}$$

زهرا: چه پیشنهاد خوبی است. در اینجا نیز به مجموع جملات یک دنباله هندسی می رسیم که جمله اول آن $\frac{37}{100}$ و قدر نسبت آن $\frac{1}{100}$ است. بنابراین حد دنباله $\left\{0/\overbrace{3737\cdots37}^{n}\right\}$ عدد $\frac{37}{99}$ است.

معلم: آفرین، شما در این حالت هم مسئله را حل کردید. آیا فکر می کنید برای هر بسط اعشاری متناوبی که قسمت تکرار شونده آن دو رقمی است، استدلال شما معتبر است؟

مریم: **بلی، در این استدلال عدد ۳۷ نقش مهمی نداشت و به جای آن هر عدد دو رقمی دیگی هم می توان قرار داد. بنابراین اگر a و b دو رقم باشند، عبارت $0/abab\cdots ab\cdots$ بسط اعشاری $\frac{ab}{99}$ است. (توجه کنید که منظور از ab در صورت کسر عدد $10a+b$ است).**

معلم: **حالا که توانسته اید این مسئله را در این حالات خاص حل کنید، در مورد حل این مسئله در حالت کلی چه حدسی می زنید و چه جوابی را پیشنهاد می کنید؟**

زهرا: **این روش از حل این مسئله حتی اگر قسمت تکرار شونده تعداد رقمهای بیشتری داشته باشد قابل تکرار است. مثلا اگر قسمت تکرار شونده m رقمی باشد و $a_1a_2\cdots a_m$باشد، عبارت**

$$0/a_1a_2\cdots a_m a_1a_2\cdots a_m a_1a_2\cdots a_m\cdots\cdots\cdots$$

بسط اعشاری عدد $\frac{a_1a_2\cdots a_m}{10^m-1}$ است.

معلم: **بسیار عالی بود و شما توانستید با یکی از استراتژی های حل مسئله که بررسی مسئله و حل آن در حالات خاص و تعمیم به حالت کلی و بازنویسی مسئله به شکلهای دیگر این مسئله را حل کنید. آیا کسی راه حل دیگری هم برای حل این مسئله یافته است؟**

اکرم: **بلی فکر دیگری به نظر من رسیده است.**

معلم: **چه نکته جدیدی نسبت به این مسئله یافته ای؟**

اکرم: **به نظر من جملات دنباله ای مانند $0/5\,,0/55\,,0/555\,,\cdots$ بسیار شبیه به هم هستند و می توان رابطه ای بین آنها پیدا کرد. مثلا ۱۰ برابر جمله دوم همان جمله اول است که ۵ واحد**

بیشتر دارد. جمله $n+1$ام هم همین طور است و ۱۰ برابر آن همان جمله nام است که ۵ واحد بیشتر دارد.

معلم: رابطه جالبی را کشف کرده ای، اما از این رابطه چگونه می خواهی برای حل مسئله استفاده کنی؟

اکرم: اگر جمله nام این دنباله را x_n بنامیم، رابطه ای را که گفتم به شکل زیر نوشته می شود.

$$10x_{n+1} = 5 + x_n$$

طبق مطالبی که در این درس خوانده ایم اگر حد دنباله $\{x_n\}$ عدد L باشد خواهیم داشت

$10L = 5 + L$ در نتیجه $L = \frac{5}{9}$.

معلم: آیا می توانی این روش را برای بسط اعشاری $0/3737\cdots37\cdots$ نیز بکار بری؟

اکرم: بلی، اگر قرار دهیم $y_n = 0/\overbrace{3737\cdots37}^{n}$ داریم $100y_{n+1} = 37 + y_n$. پس اگر حد دنباله $\{y_n\}$ عدد K باشد داریم $100K = 37 + K$ بنابراین $K = \frac{37}{99}$.

معلم: روش شما هم خوب است و تا حدودی این مسئله را حل می کند. در واقع شما از فرض اضافی همگرایی دنباله های مورد نظر استفاده می کنید در حالی که در روش قبلی، همگرایی این دنباله ها نیز به دست می آمد. البته طبق قضایایی که آنها را اثبات نخواهیم کرد همگرایی آن دنباله ها خود به خود برقرار است، بنابراین روش شما هم قابل قبول است.

در این مباحثه کلاسی مشخص شد که هر بسط اعشاری متناوبی نشان دهنده یک عدد گویا است. بر عکس می توان نشان داد که بسط اعشاری هر عدد گویایی متناوب است. بنابراین تفاوت اعداد گویا و اعداد اصم را می توان در بسط اعشاری آنها تشخیص داد. بسط های اعشاری اعداد گویا متناوب است و بسط اعشاری اعدد اصم غیر متناوب است.

نوشتن بسط اعشاری اعداد اصم ساده نیست و معمولا تمامی رقمهای بسط آنها را نمی شناسیم مثلا

$$\sqrt{54} = 7/3484692283\cdots$$

البته تا هر مرحله که بخواهیم می توانیم با روشهای آزمون و خطا رقمهای بسط اعشاری اعدادی مانند $\sqrt{54}$ را به دست آوریم ولی نمی توانیم تمام این ارقام را یک مرتبه ارائه کنیم.

یک سوال قابل تامل آن است که اگر به دلخواه و به طور تصادفی ارقامی را پشت سرهم به صورت $0/d_1d_2\cdots d_n\cdots$ بنویسیم آیا این عبارت بسط اعشاری عددی خواهد بود؟

جواب این سوال مثبت است و این یکی از خواص اساسی اعداد حقیقی است که بدون اثبات آن را می پذیریم.

تمرین در کلاس

۱- عبارت $0/1212\cdots12\cdots$ چه عددی را نشان می دهد؟

۲- عبارت $6/22\cdots2\cdots$ چه عددی را نشان می دهد؟

۳- عبارت $0/32121\cdots21\cdots$ چه عددی را نشان می دهد؟

مسائل

۱- بسط اعشاری اعداد $0/1$ و $2/53$ و $73/342$ را بنویسید. اگر a یک عدد اعشاری باشد، بسط اعشاری آن چگونه خواهد بود؟

۲- با محاسبه اعداد گویای $1/22\cdots2\cdots$ و $7/44\cdots4\cdots$ و محاسبه بسط اعشاری مجموع این دوعدد نشان دهید

$$7/44\cdots4\cdots+1/22\cdots2\cdots=8/66\cdots6\cdots$$

۳- بسط اعشاری عدد $(1/11\cdots1\cdots)^2$ را حساب کنید.

٤- ثابت کنید $5\times0/22\cdots2\cdots=1/11\cdots1\cdots$