

فصل سوم

مثلثات

۱. توابع مثلثاتی
۲. اتحادهای مثلثاتی
۳. معادلات مثلثاتی
۴. روش جبری حل معادلات مثلثاتی
۵. روش نموداری حل معادلات مثلثاتی
۶. تابع وارون توابع مثلثاتی

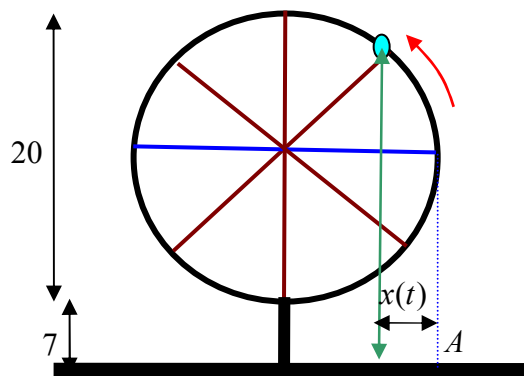
توابع مثلثاتی

بیان ریاضی بسیاری از حرکت‌های متناوب در طبیعت، با توابع مثلثاتی انجام می‌شود. مثلاً حرکت رفت و برگشتی یک آونگ، حرکت سیارات به دور خورشید، نوسانات یک فنر همگی از طریق توابع مثلثاتی قابل بیان هستند.

تمرین در کلاس

فرض کنید چرخ و فلکی به قطر ۲۰ متر داریم که هر ۲ دقیقه یک دور در جهت مثبت می‌چرخد. فرض کنید پایینترین نقطه چرخ و فلک ۷ متر بالای زمین باشد، و کابین خاصی از چرخ و فلک را در نظر گرفته باشیم که در لحظه $t = 0$ با زمین ۱۷ متر فاصله دارد و رو به بالا در حال حرکت است.

می‌خواهیم در هر لحظه ارتفاع این کابین از سطح زمین را مشخص کنیم.



۱. پس از گذشت t ثانیه، کمانی که کابین طی می‌کند چند رادیان است؟
۲. پس از گذشت t ثانیه، فاصله کابین تا قطر افقی کابین چقدر است؟ (اگر کابین زیر قطر افقی باشد فاصله آن تا قطر افقی را منفی حساب کنید).

غیرقابل استناد(نسخه اول)

۳. تابعی که ارتفاع کابین را (بر حسب متر) نسبت به زمان (بر حسب ثانیه) نشان می دهد بنویسید.
۴. اگر در لحظه t فاصله سایه این کابین روی زمین تا نقطه A را با $x(t)$ نشان دهیم، این تابع را به دست آورید.

مثال: می دانیم که تغییرات طول روز در هر سال مشابه سال قبل تکرار می شود. اگر از اول فروردین طول هر روز را یادداشت کنیم این مقادیرها تا اول تابستان در حال افزایش هستند. بعد از اولین روز تابستان طول روزها کاهش می یابند تا به روز اول زمستان برسیم و مجدداً بعد از روز اول زمستان طول روزها افزایش می یابند. این یک حرکت تناوبی است و می توانیم با یک تابع مثلثاتی طول روزها را بیان کنیم.

فرض کنید t نشان دهنده روزهای سال باشد و $t = 0$ نشان دهنده روز اول فروردین و $t = 365$ نشان دهنده روز آخر سال باشد. طول روز t ام (بر حسب ساعت) را با $L(t)$ نشان می دهیم و فرض کنید به ازای برخی اعداد مانند A و B و C داریم $L(t) = A \sin(Bt) + C$. با داشتن اطلاعات زیر سعی می کنیم A و B و C را به دست آوریم.

اول دی	اول مهر	اول تیر	اول فروردین	روز
۹	۱۲/۲۵	۱۵/۵	۱۲/۲۵	طول روز(ساعت)

تمرین در کلاس

۱. نشان دهید دوره تناوب تابع $L(t)$ ، $\frac{2\pi}{B}$ است و نتیجه بگیرید $B = \frac{2\pi}{366} \approx 0.02$.

غیر قابل استناد (نسخه اول)

۲. نشان دهید بیشترین مقدار $L(t)$ برابر $A+C$ و کمترین مقدار آن $-A+C$ است و نتیجه

$$C = 12/25, A = 3/35$$

۳. تابع $L(t)$ را بنویسید و طول روز را در ۵ آذر حساب کنید.

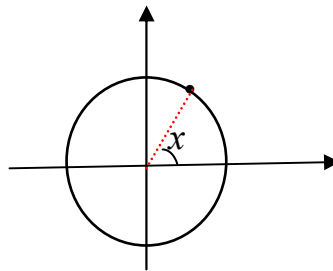
یکی از توابع هم مثلثاتی تابع تانژانت است. به ازای هر مقدار x بنا به تعریف:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

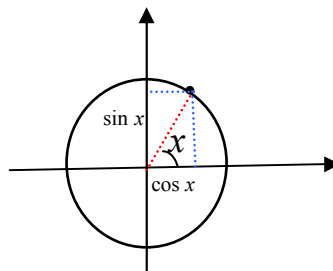
مقدار $\tan x$ را می توان در دایره مثلثاتی به شکل هندسی نمایش داد. با رسم یک دستگاه مختصات

و دایره واحد به مرکز مبدا، هر مقدار x که به عنوان زاویه ای بر حسب رادیان در نظر گرفته شود نقطه

ای از دایره مثلثاتی را معین می کند.



با رسم خطهایی عمود بر دو محور، از این نقطه مقدارهای $\sin x$ و $\cos x$ مشخص می شوند.

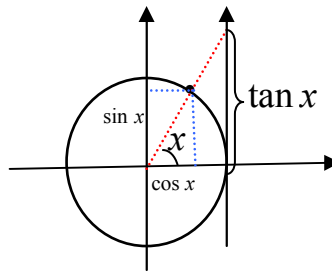


با رسم خط مماس بر دایره مثلثاتی در نقطه $(1, 0)$ و ساختن محوری جدید، اگر خطی را که مبدا را

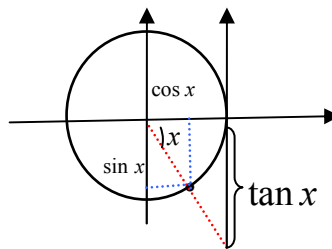
به نقطه روی دایره وصل می کند ادامه دهیم تا این محور جدید را قطع کند، عرض نقطه برخورد مقدار

غیر قابل استناد (نسخه اول)

$\tan x$ را نشان می دهد.



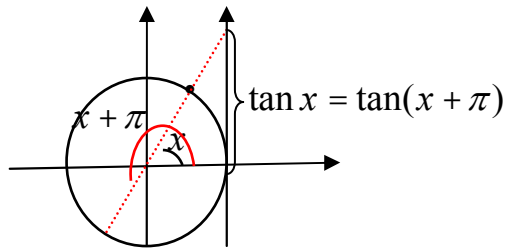
درستی این مطلب از طریق رابطه تشابه در مثلثهای قائم الزاویه ای که ساخته شده اند قابل بررسی است. درستی علامت مقدار تانژانت نیز با بررسی آن، وقتی زاویه در ربعهای دیگری قرار می گیرد قابل انجام است. مثلاً وقتی که زاویه در ربع چهارم قرار می گیرد مقدار کسینوس مثبت و مقدار سینوس منفی است، پس مقدار تانژانت منفی است.



از آنجا که محورهای بالا مقادیرهای سینوس و کسینوس و تانژانت را نمایش می دهند، در دایره مثلثاتی این محورها را محور سینوسها و محور کسینوسها و محور تانژانتها می نامند. از روی شکل مشخص است که برای زاویه هایی که مضرب صحیح و فردی (مثبت یا منفی) از $\frac{\pi}{2}$ هستند مقدار تانژانت تعریف نمی شود، زیرا در این نقاط خط واصل از مبدا به نقطه روی دایره با محور تانژانتها موازی است و آن را قطع نمی کند. از طریق جبری نیز مشاهده می کنیم که در این زاویه ها کسینوس صفر است و کسر $\frac{\sin x}{\cos x}$ معنا ندارد. بنابراین دامنه تعریف تابع $\tan x$ اعداد به صورت $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ که k اعداد صحیح هستند را در بر ندارد.

غیر قابل استناد (نسخه اول)

از روی شکل همچنین مشاهده می‌کنیم که برای دو زاویه x و $x + \pi$ مقدار تانژانت مساوی است.



به طور جبری نیز می‌توان این رابطه را به دست آورد.

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

از این تساوی نتیجه می‌شود $\tan x$ تابعی متناوب است و π یک دوره تناوب آن است.



در این فعالیت می‌خواهیم چگونگی تابع تانژانت را در یک دوره تناوب آن، بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ، بررسی کنیم.

۱. از طریق شکل و محور تانژانتها توضیح دهید که وقتی مقادیرهای x از صفر شروع شوند و به

طور مداوم افزایش یابند تا به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک شوند، مقادیرهای $\tan x$ چگونه تغییر می‌کنند.

۲. آیا تابع تانژانت روی بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ صعودی است؟

۳. از طریق شکل و محور تانژانتها توضیح دهید که وقتی مقادیرهای x از صفر شروع شوند و به طور

مداوم کاهش یابند تا به $-\frac{\pi}{2}$ نزدیک شوند، مقادیرهای $\tan x$ چگونه تغییر می‌کنند.

۴. آیا تابع تانژانت روی بازه $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ صعودی است؟ آیا تابع تانژانت روی بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ صعودی

است؟

غیرقابل استناد(نسخه اول)

۵. آیا تابع تانژانت روی بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ تابعی زوج یا فرد می باشد.

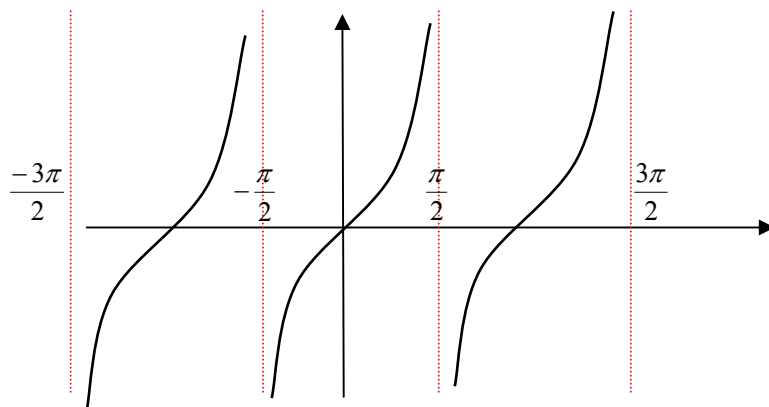
۶. با تکمیل جدول زیر و یافتن مقدار $\tan x$ در چند نقطه خاص نمودار تقریبی این تابع را در کل دامنه

آن رسم کنید.

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$							

با توجه به اطلاعاتی که در فعالیت قبل نسبت به تابع تانژانت به دست آورده اید، نمودار تقریبی آن به

شکل زیر خواهد بود.



یکی دیگر از توابع مهم مثلثاتی تابع کتانژانت است که به صورت زیر تعریف می شود.

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

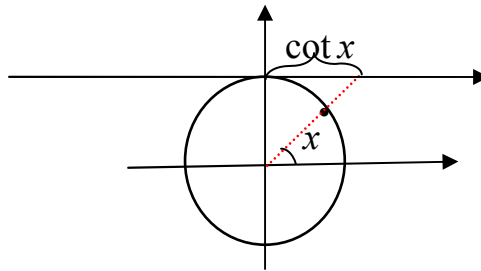
این تابع شباهتهای بسیاری به تابع تانژانت دارد و خواص آن شبیه تابع تانژانت است. در واقع در زاویه

هایی که تابع تانژانت ناصفر است مقدار کتانژانت وارون مقدار تانژانت است.

۱. نشان دهید دامنه تابع کتانژانت همه اعداد، غیر از اعداد به صورت $k\pi$ است که k عددی صحیح است.

۲. نشان دهید π یک دوره تناوب تابع کتانژانت است.

۳. نشان دهید مقدار $\cot x$ از طریق محوری که در زیر رسم شده است و آن را محور کتانژانتها می نامند به دست می آید.



۴. از طریق محور کتانژانتها توضیح دهید که وقتی مقدارهای x از یک زاویه مثبت نزدیک صفر شروع شوند

و به طور مداوم افزایش یابند تا به π نزدیک شوند، مقدارهای $\cot x$ چگونه تغییر می کنند.

۵. وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع کتانژانت در بازه $(0, \pi)$ چگونه است؟

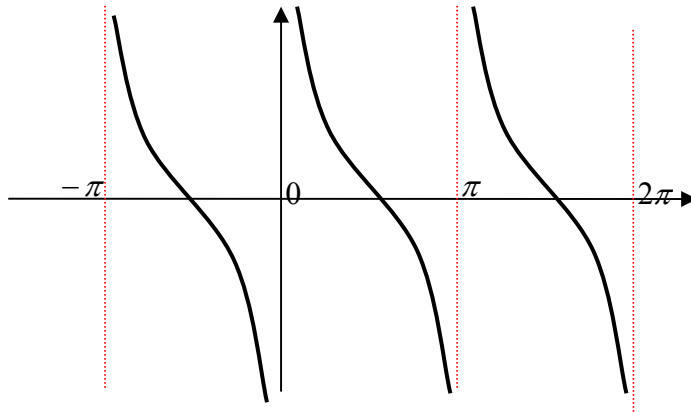
۶. با یافتن مقدار $\cot x$ در چند نقطه خاص نمودار تقریبی این تابع را در کل دامنه آن رسم کنید.

۷. درستی تساوی $\cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$ را به دست آورید و از طریق آن چگونگی ارتباط نمودارهای دو

تابع $\tan x$ و $\cot x$ را توضیح دهید.

غیرقابل استناد(نسخه اول)

با توجه به نتایجی که از تمرین بالا به دست می آید نمودار تابع کتانژانت به شکل زیر است.



اتحادهای مثلثاتی

حل یک مسئله

اگر زاویه ای دو برابر شود، نسبتهای مثلثاتی آن چگونه تغییر می کنند؟

کسی که اولین بار به این سوال پاسخ گفت **ابوالوفای بوزجانی** از دانشمندان ایرانی بود که نقش

زیادی در گسترش علم مثلثات در آن دوره داشته است. فعالیت زیر بر اساس روش بوزجانی برای

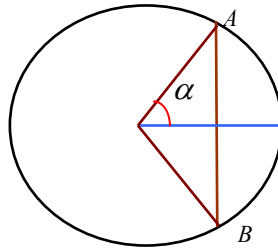
یافتن $\sin 2\alpha$ بر حسب نسبت های مثلثاتی α می باشد.

فعالیت

۱. از طریق شکل زیر نشان دهید که اگر AB وترى در دایره واحد باشد که زاویه کمان روبروی آن

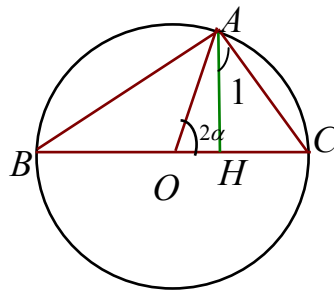
2α باشد، طول وتر $2 \sin \alpha$ است.

غیر قابل استناد (نسخه اول)



۲. در شکل زیر O مرکز دایره واحد و زاویه بین دو شعاع OA و OC برابر 2α است و AH عمود

بر BC است. ابتدا استدلال کنید $\hat{B} = \alpha$ و $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ و $\hat{A}_1 = \alpha$



۳. استدلال کنید که $AC = 2 \sin \alpha$ و $AH = \sin 2\alpha$ و در مثل قائم الزویه AHC داریم

$$\cos \hat{A}_1 = \frac{AH}{AC}$$

۴. نتیجه بگیرید: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

۵. از تساویهای $OH = 1 - HC$ و $OH = \cos 2\alpha$ و $\sin \hat{A}_1 = \frac{HC}{AC}$ ، نتیجه بگیرید:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

اگرچه استدلال بالا فقط برای حالتی که $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ اعتبار دارد، ولی برای سایر زوایا نیز با استفاده از

خواص توابع سینوس و کسینوس می توان درستی این تساویها را به دست آورد.

مثال: برای زاویه $\alpha = \frac{\pi}{4}$ داریم: $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 2 \times \frac{\pi}{4} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

مثال: برای زاویه $\alpha = \frac{\pi}{6}$ داریم:

غیرقابل استناد (نسخه اول)

$$2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = 2 \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 2 \times \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3}$$

به کمک روابط بالا می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دیگری غیر از $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{4}$ را هم با دقت

حساب کنیم.

مثال: سینوس زاویه ۱۵ درجه را حساب می‌کنیم.

$$\cos 2 \times 15^\circ = 1 - 2 \sin^2 15^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2 \sin^2 15^\circ \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

تمرین در کلاس

۱. با توجه به درستی تساوی $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ برای زاویه‌های حاده، درستی این تساوی را

برای زاویه منفرجه β ثابت کنید. (از زاویه حاده $\alpha = \pi - \beta$ کمک بگیرید).

۲. نشان دهید برای هر زاویه α داریم:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

۳. نشان دهید برای هر زاویه α داریم:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

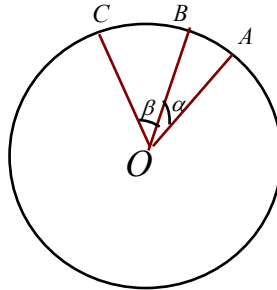
۴. سینوس و کسینوس زاویه $22/5^\circ$ را حساب کنید.

مسئله مهمتر دیگری که بوزجانی به حل آن پرداخت یافتن نسبت‌های مثلثاتی مجموع دو زاویه مانند α

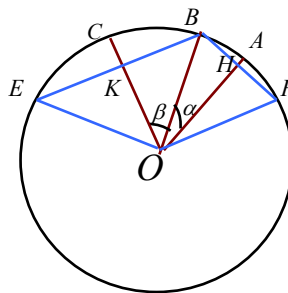
و β بود. روشی که در زیر برای حل این مسئله می‌آید بر اساس روش بوزجانی است.

غیرقابل استناد(نسخه اول)

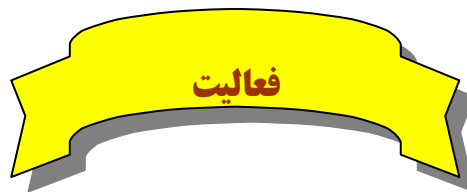
در دایره واحد دو زاویه α و β را به مرکز مبدا پهلو می رسم می کنیم. حالتی را در نظر می گیریم که $\alpha + \beta$ حاده باشد.



اگر زاویه های مرکزی 2α و 2β و $2(\alpha + \beta)$ را بسازیم وتر روبروی آنها مقادیر $2\sin\alpha$ و $2\sin\beta$ و $2\sin(\alpha + \beta)$ را نشان خواهند داد. برای این کار از B به OC و OA عمودی رسم می کنیم تا دایره را به ترتیب در نقاط E و F قطع کنند.



ادامه روش بوزجانی را در فعالیت زیر دنبال می کنیم.



۱. با رسم پاره خطهای EF و KH با استاده از قضیه تالس نتیجه بگیرید این دو پاره خط موازیند و

$$KH = \sin(\alpha + \beta) \text{ است و } EF \text{ نصف } KH$$

۲. نشان دهید زاویه های \widehat{EFB} و \widehat{KHB} مساویند و برابر β می باشند.

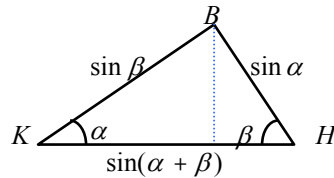
۳. به طور مشابه نشان دهید زاویه های \widehat{FEB} و \widehat{HKB} مساویند و برابر α می باشند.

غیرقابل استناد(نسخه اول)

۴. مثلث BKH را جداگانه در زیر رسم کرده ایم و ارتفاع وارد بر ضلع KH را رسم کرده ایم. با

توجه به آن که طول اضلاع و زاویه های این مثلث معلوم شده اند، نتیجه بگیرید:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$



اگرچه استدلال بالا فقط برای حالتی که $\alpha + \beta$ حاده باشد اعتبار دارد، ولی با استفاده از خواص

توابع سینوس و کسینوس می توان درستی آن را برای تمام زاویه ها به دست آورد. مثلاً در حالتی که

α و β حاده هستند ولی $\alpha + \beta$ منفرجه است، می توانیم برای دو زاویه $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ و $\beta' = \frac{\pi}{2} - \beta$

که هر دو حاده هستند و $\alpha' + \beta' = \pi - (\alpha + \beta)$ نیز حاده است بنویسیم:

$$\sin(\alpha' + \beta') = \sin \alpha' \cos \beta' + \cos \alpha' \sin \beta'$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\pi - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha' + \beta') = \sin \alpha' \cos \beta' + \cos \alpha' \sin \beta' \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \\ &= \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

برای بقیه حالتها نیز می توان محاسبات مشابهی را انجام داد.

مثال: سینوس زاویه 75° را حساب می کنیم.

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$



۱. فرمول سینوس مجموع دو زاویه برای هر دو زاویه دلخواهی برقرار است. در این فرمول β را

به $-\beta$ تبدیل کنید و نتیجه بگیرید برای هر دو زاویه α و β داریم:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

۲. با توجه به آن که $\cos(\alpha + \beta) = \sin(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)) = \sin((\frac{\pi}{2} - \alpha) - \beta)$ ، نتیجه بگیرید برای هر

دو زاویه α و β داریم:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

۳. ثابت کنید برای هر دو زاویه α و β داریم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

۴. ثابت کنید برای هر زاویه α داریم:

$$\sin 3\alpha = -4\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha \quad , \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$



به کمک روابط بالا می توانیم نسبتهای مثلثاتی زاویه های بیشتری را با دقت حساب کنیم.

مثال: تانژانت زاویه 105° را حساب می کنیم.

$$\begin{aligned} \tan 105^\circ &= \tan(45^\circ + 60^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 60^\circ} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - 1 \times \sqrt{3}} = -\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{2} \end{aligned}$$

مثال: کسینوس زاویه $67/5^\circ$ را حساب می کنیم.

غیر قابل استناد (نسخه اول)

داریم $67/5^\circ = 3 \times 22/5^\circ = 3 \times \frac{45^\circ}{2}$. ابتدا کسینوس $22/5^\circ$ را حساب می‌کنیم.

$$\cos^2 22/5^\circ = \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

حال کسینوس $67/5^\circ$ را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \cos 67/5^\circ &= 4 \cos^3(22/5^\circ) - 3 \cos 22/5^\circ = 4 \times \frac{(\sqrt{2 + \sqrt{2}})^3}{8} - 3 \times \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} (\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

روابط به دست آمده در محاسبات نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زاویه‌ها موجب می‌شود روابط

جدید دیگری بین توابع مثلثاتی به دست آیند. مثلاً برای هر دو زاویه α و β داریم:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

با جمع طرفین تساوی نتیجه می‌شود:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$



۱. با استفاده از فرمول محاسبه $\cos(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ نتیجه بگیرید:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

۲. با استفاده از روابط بند (۱) و نتایج قبل با قرار دادن $A = \alpha + \beta$ و $B = \alpha - \beta$

نتیجه بگیرید:

غیرقابل استناد (نسخه اول)

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

این اتحاد های مثلثاتی کمک زیادی در ساده سازی عبارتهای مثلثاتی می کنند و از آنها در جهت

تبدیل جمعها به ضربها و برعکس تبدیل ضربها به جمعها استفاده می شود.

مثال: نشان دهید $\cos 2x + \cos 4x = 2 \cos x \cos 3x$.

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos 4x &= 2 \cos \frac{2x+4x}{2} \cos \frac{2x-4x}{2} \\ &= 2 \cos 3x \cos(-x) = 2 \cos x \cos 3x \end{aligned}$$

مثال: عبارت $\sin(x+h) - \sin x$ را به صورت حاصلضربی تبدیل می کنیم.

$$\begin{aligned} \sin(x+h) - \sin x &= \sin(x+h) + \sin(-x) = 2 \sin \frac{x+h+(-x)}{2} \cos \frac{x+h-(-x)}{2} \\ &= 2 \sin \frac{h}{2} \cos \left(x + \frac{h}{2}\right) \end{aligned}$$

مسائل

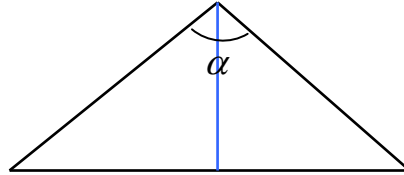
۱. اگر α زاویه ای در ربع اول و β زاویه ای در ربع سوم باشد که $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{5}{13}$

مقدارهای $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ و $\tan(\alpha + \beta)$ را تعیین کنید.

۲. با استفاده از مثلث متساوی الساقین زیر که طول ساقهای آن واحد است و زاویه راس آن α

است، با محاسبه مساحت آن از دو طریق نتیجه بگیرید:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$



۳. نمودار تابع $y = 3 - 6\sin^2 x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید. دوره تناوب این تابع چقدر

است؟

۴. فرمول محاسبه $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را از طریق فرمول محاسبه $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha + \beta)$ به

دست آورید.

۵. برای یک زاویه دلخواه α که برای آن $\tan 2\alpha$ تعریف شده است درستی تساوی زیر را ثابت

کنید.

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

۶. اگر α زاویه ای در بازه $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ باشد که $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ ، مقدار $\tan \frac{\alpha}{2}$ را حساب کنید.

۷. درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 \quad \text{ب)} \quad \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{الف)}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad \text{د)} \quad \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \quad \text{ج)}$$

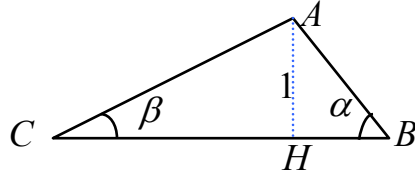
$$\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 8 \quad \text{ه)}$$

۷. در این مسئله روش دیگری برای محاسبه فرمول $\sin(\alpha + \beta)$ در حالتی که α و β حاده

هستند ارائه می شود. مثلث ABC را به گونه ای می سازیم که زاویه راس B برابر α و زاویه

غیرقابل استناد(نسخه اول)

راس C برابر β باشد و ارتفاع وارد بر ضلع BC واحد باشد. چگونگی ساختن این مثلث را توضیح دهید.

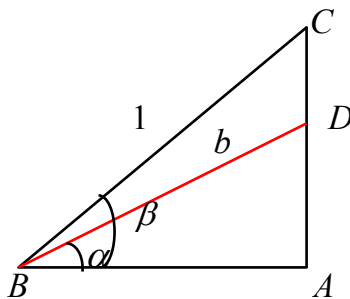


با محاسبه طول پاره خطهای AB و AC و CH و BH بر حسب نسبتهای مثلثاتی α و β و محاسبه مساحت مثلث ABC از دو طریق، یا با استفاده از رابطه سینوسها در مثلث ABC ، فرمول محاسبه $\sin(\alpha + \beta)$ را به دست آورید.

۸. در این مسئله روش دیگری برای محاسبه فرمول $\sin(\beta - \alpha)$ در حالتی که α و β حاده هستند و $\alpha < \beta$ ، ارائه می شود. در شکل زیر زاویه \hat{A} قائمه است و ضلع BC واحد است. طول پاره خط BD را عددی مانند b فرض کنید. با محاسبه طول پاره خطهای دیگری که در شکل دیده می شود و محاسبه مساحت مثلثهایی که در شکل دیده می شوند، با استفاده از تساوی:

$$(\text{مساحت } ADB) - (\text{مساحت } ABC) = (\text{مساحت } BDC)$$

ثابت کنید: $\sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha$



معادلات مثلثاتی

حل یک مسئله

آیا می توان مثلثی رسم کرد که طول دو ضلع آن ۲ و ۶ سانتی متر باشد و مساحت آن ۳ سانتی متر مربع شود؟ چند مثلث با این خاصیت موجودند و با چه روشی می توان آنها را ساخت؟

معلم از دانش آموزان پرسید: چگونه می توانیم این مسئله را حل کنیم.

زهرا: باید طول ضلع سوم را هم بیابیم تا مثلث مشخص شود و طول این ضلع باید مقداری باشد

تا مساحت مثلث ۳ سانتی متر مربع شود.

صدیقه: ولی ما رابطه ای که مساحت مثلث را بر حسب طول اضلاع بیان کند، نمی شناسیم پس

راهی برای به دست آوردن ضلع سوم نخواهیم داشت.

معلم: البته چنین رابطه ای وجود دارد ولی چون ما این رابطه را نمی شناسیم مجبوریم دنبال راه

حل دیگری بگردیم. اما نکته ای که زهرا بیان کرد آن است که ما باید با روشی مثلث جواب را

مشخص کنیم. اگر راهی برای مشخص کردن ضلع سوم نداریم باید دنبال چیز دیگری بگردیم.

زینب: چطور است که زاویه بین آن دو ضلع را بیابیم؟

معلم: فکر بسیار خوبی است، چه راهی برای تعیین این زاویه داریم؟

غیرقابل استناد(نسخه اول)

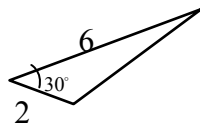
زهرا: ما می توانیم مساحت یک مثلث را از طریق طول دو ضلع و زاویه بین آنها به دست آوریم.

اگر این زاویه را θ بنامیم باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 2 \times \sin \theta = 3$$

زینب: از این معادله نتیجه می شود $\sin \theta = \frac{1}{2}$ یعنی θ ، 30° درجه است. پس جواب مسئله مثلث

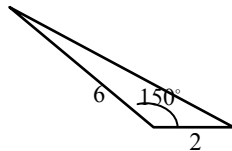
زیر است.



معلم: بله شما توانستید یک جواب برای این مسئله بیابید. اما آیا این معادله جواب دیگری ندارد؟

صدیقه: برای زاویه 150° درجه نیز داریم $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ ، پس مثلث دیگری هم با شرایط مورد نظر

مسئله وجود دارد.



معلم: آیا جواب دیگری هم می توانید پیدا کنید؟

زهرا: نه، جواب دیگری وجود ندارد زیرا زاویه های دیگری که سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است

نمی توانند زاویه یک مثلث باشند.

در برخی از مسائل مجهول یک زاویه است که اطلاعاتی از نسبت های مثلثاتی آن در دست است.

اگر این اطلاعات را به صورت یک معادله بنویسیم، آن را یک **معادله مثلثاتی** می نامند.

مثال: در مثلثی که طول اضلاع آن 1, 3, $\sqrt{7}$ است، زاویه روبروی ضلع به طول $\sqrt{7}$ چقدر است؟

اگر این زاویه را θ بنامیم طبق رابطه کسینوسها داریم:

$$(\sqrt{7})^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \cos \theta$$

این یک معادله مثلثاتی بر حسب θ است و با حل آن داریم: $\cos \theta = \frac{1}{2}$ تنها زاویه ای که بتواند زاویه یک مثلث باشد و کسینوس آن $\frac{1}{2}$ باشد 60° درجه است.

روش جبری حل معادلات مثلثاتی

شیوه کلی حل معادلات مثلثاتی به این صورت است که پس از محاسبات جبری معادله را به یکی

از شکلهای $\sin \alpha = \sin \beta$ یا $\cos \alpha = \cos \beta$ یا $\tan \alpha = \tan \beta$ در بیاوریم.

در مثال بالا، معادله مثلثاتی پس از محاسبات جبری به صورت $\cos \theta = \frac{1}{2}$ در آمد که یعنی

$\cos \theta = \cos 60^\circ$. همچنین در مسئله مطرح شده، معادله به صورت $\sin \theta = \frac{1}{2}$ در آمد که یعنی

$$\sin \theta = \sin 30^\circ$$

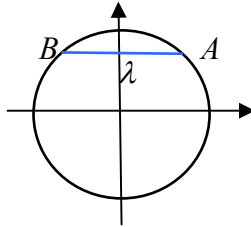
حل یک مسئله

اگر α و β دو زاویه باشند که $\sin \alpha = \sin \beta$ ، این دو زاویه چه رابطه ای با هم دارند؟

مناسب است که این مسئله را از طریق دایره مثلثاتی بررسی کنیم. اگر $\sin \alpha = \sin \beta = \lambda$

غیرقابل استناد(نسخه اول)

عددی در بازه $[-1, 1]$ است و زاویه هایی که سینوس آنها λ است، طبق شکل زیر آنهايي هستند نقطه متناظر آنها در دایره مثلثاتی در نقطه A یا B قرار گیرد.



اگر نقطه های متناظر α و β روی دایره مثلثاتی هر دو در A یا هر دو در B قرار گیرند که معنای آن این است که $\alpha = \beta + 2k\pi$ که k عددی صحیح است. و اگر نقطه های متناظر α و β روی دایره مثلثاتی یکی در A و دیگری در B قرار گیرند معنای آن این است که α و $\pi - \beta$ در مضرب صحیحی از 2π اختلاف دارند، یعنی $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi$ که k عددی صحیح است. بنابراین اگر α و β دو زاویه باشند که $\sin \alpha = \sin \beta$ می توان نتیجه گرفت که $\alpha = \beta + 2k\pi$ یا $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi$ که k عددی صحیح است. به عبارت دیگر:

معادله $\sin \alpha = \sin \beta$ دارای جوابهای به صورت $\alpha = 2k\pi + \beta$ و $\alpha = (2k+1)\pi - \beta$ است که k عددی صحیح است.

مثال: معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.

می دانیم که جوابهای این معادله به شکل $2x = 2k\pi + 3x$ و $2x = (2k+1)\pi - 3x$ هستند. در

نتیجه $x = 2k\pi$ و $x = \frac{2k+1}{5}\pi$ جوابهای این معادله اند.

با استدلالی مشابه از طریق دایره مثلثاتی می توان نتیجه گرفت که اگر α و β دو زاویه باشند که

$\cos \alpha = \cos \beta$ آنگاه $\alpha = \beta + 2k\pi$ یا $\alpha = -\beta + 2k\pi$ که k عددی صحیح است. به عبارت دیگر:

معادله $\cos \alpha = \cos \beta$ دارای جوابهای به صورت
 $\alpha = 2k\pi \pm \beta$ است که k عددی صحیح است.

مثال: معادله $\cos x = \cos 2x$ را حل کنید.

می دانیم که جوابهای این معادله به شکل $x = 2k\pi \pm 2x$ هستند. در نتیجه $x = 2k\pi$ و

جوابهای این معادله اند. البته جوابهای به صورت $x = \frac{2k\pi}{3}$ خود به خود جوابهای

به صورت $x = 2k\pi$ را در بر دارد.

اگر α و β دو زاویه باشند که $\tan \alpha = \tan \beta$ می توان نتیجه گرفت که $\alpha = k\pi + \beta$ که k

عددی صحیح است. به عبارت دیگر:

معادله $\tan \alpha = \tan \beta$ دارای جوابهای به صورت
 $\alpha = k\pi + \beta$ است که k عددی صحیح است.

مثال: معادله $\tan x = \tan 5x$ را حل کنید.

می دانیم که جوابهای این معادله به شکل $5x = k\pi + x$ هستند. پس $x = k\frac{\pi}{4}$.

مثال: معادله $\sin x + \cos x = 1$ را حل می کنیم.

باید سعی کنیم که با محاسبات جبری، این معادله را به یکی از سه شکل بالا در آوریم. مثلاً

می توانیم محاسبات زیر را انجام دهیم.

غیرقابل استناد(نسخه اول)

$$\sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} + \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow 2 \tan \frac{x}{2} + 1 - \tan^2 \frac{x}{2} = 1 + \tan^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \tan \frac{x}{2} (1 - \tan \frac{x}{2}) = 0$$

بنابراین معادله دارای دو دسته جواب $\tan \frac{x}{2} = 0$ و $\tan \frac{x}{2} = 1$ است. اولی به صورت $\tan \frac{x}{2} = \tan 0$

و دومی به صورت $\tan \frac{x}{2} = \tan \frac{\pi}{4}$ است. از اولی جوابهای $\frac{x}{2} = k\pi + 0$ و از دومی جوابهای

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ و } x = 2k\pi \text{ به دست می آیند. در نهایت کلیه جوابها به صورت } x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

خواهد بود.

یک راه حل دیگر آن است که در تمرینات دیدید که $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ ، بنابراین

معادله به صورت $\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$ در می آید. در نتیجه $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$. از این

معادله جوابهای $x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ و $x + \frac{\pi}{4} = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{4}$ به دست می آیند که نهایتاً

همان جوابهای $x = 2k\pi$ و $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ می باشند.

مثال: کلیه جوابهای معادله $\cos t(2 \cos t - 9) = 5$ را به دست آورید.

ابتدا معادله را به صورت $2 \cos^2 t - 9 \cos t - 5 = 0$ می نویسیم. این یک معادله درجه دوم بر

حسب $\cos t$ است. یعنی اگر قرار دهیم $x = \cos t$ ، معادله به شکل $2x^2 - 9x - 5 = 0$ در می آید.

با حل این معادله درجه دوم جوابهای $x = 5$ و $x = -\frac{1}{2}$ به دست می آیند. حال باید معادلات

$\cos t = 5$ و $\cos t = -\frac{1}{2}$ را حل کنیم. اولین معادله جواب ندارد (چرا؟) و دومین معادله به شکل

غیرقابل استناد (نسخه اول)

نوشته می شود پس کلیه جوابها به صورت $t = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ می باشند که k

عددی صحیح است.



۱. اگر زاویه حاده ای باشد که $\sin \theta_0 = \frac{3}{5}$ ، کلیه جوابهای معادله $6 \cos x + 8 \sin x = 5$ را به

دست آورید و آن جوابهایی که $\pi < x < 2\pi$ را تعیین کنید.

۲. کلیه جوابهای معادله $\frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 4$ را تعیین کنید.

۳. کلیه جوابهای معادله $\tan x - \cot x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ را تعیین کنید.

روش نموداری حل معادلات مثلثاتی

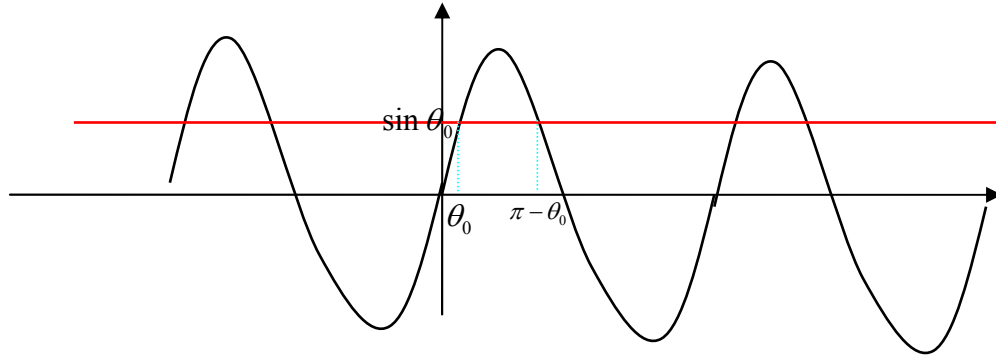
در فصل اول با روش نموداری حل معادلات آشنا شدید. این روش برای حل معادلات مثلثاتی نیز

می تواند به کار رود به شرط آن که نمودار توابعی که معادله را ساخته اند قابل رسم باشند.

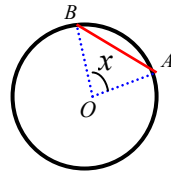
مثال: معادله $\sin x = \sin \theta_0$ را با روش نموداری حل می کنیم.

نمودار تابع $y = \sin x$ و تابع ثابت $y = \sin \theta_0$ را رسم می کنیم. طول نقاط محل تلاقی جوابهای

معادله هستند.



مثال: در دایره ای به شعاع ۲ سانتی متر وتری رسم کنید که مساحت محصور بین وتر و دایره برابر ۱ سانتی متر مربع شود.



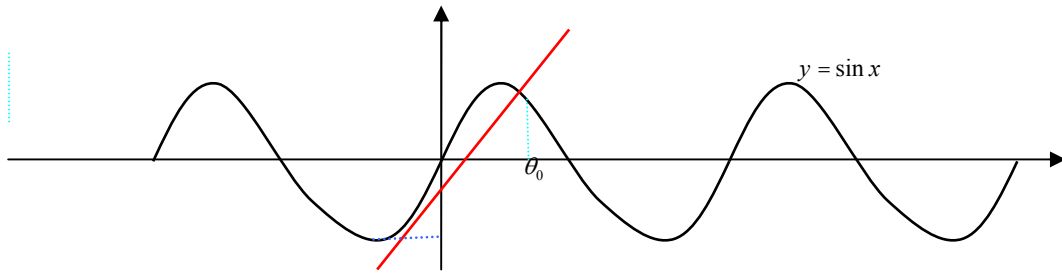
برای مشخص کردن وتر کافی است زاویه مرکزی روبروی وتر را مشخص کنیم. مساحت محصور بین وتر و دایره برابر است با تفاضل مساحت مثلث OAB از مساحت قطاع دایره با زاویه مرکزی x . مساحت مثلث برابر است با $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin x$ و مساحت قطاع دایره برابر است

با $\frac{x}{2} \times 2^2$ (بر حسب رادیان است). بنابراین داریم:

$$2x - 2 \sin x = 1$$

برای حل نموداری این معادله آن را به صورت $\sin x = x - \frac{1}{2}$ می نویسیم. باید نمودار توابع

$y = \sin x$ و $y = x - \frac{1}{2}$ را رسم کنیم. طول نقاط تلاقی جوابهای این معادله هستند.



این شکل نشان می دهد مسئله جواب منحصر بفردی دارد که زاویه ای منفرد است. برای یافتن دقیقتر جواب می توانیم با روش آزمون و خطا زاویه های بین ۹۰ درجه تا ۱۸۰ درجه را آزمایش کنیم تا ببینیم بین کدام دو زاویه بالا و پایین بودن نمودارهای $y = \sin x$ و $y = x - \frac{1}{2}$ جا به جا می شود. همان طور که می بینید این معادله راه حل جبری ندارد و فقط از طریق نمودار می توانیم در مورد جوابهای آن اظهار نظر کنیم.

مسائل

۱. معادلات زیر را حل کنید و جوابهایی که در بازه $[-\pi, \pi]$ هستند را تعیین کنید.

الف) $\sin x - \cos x = 1$ ب) $\sin 2\theta + \sqrt{2} \cos \theta = 0$ ج) $\tan x \tan 2x = 1$

د) $2 \sin^2 t + 2 \sin t - 1 = 0$ ه) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ و) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

۲. معادلات زیر را از لحاظ مقدار تقریبی جواب و تعداد جواب با روش نموداری حل کنید.

الف) $\sin x + x \cos x = 0$ ب) $\theta \sin 2\theta - \cos \theta = 0$

۲. مثلثی رسم کرده ایم که طول اضلاع آن ۲ و $\sqrt{2}$ و $1 + \sqrt{3}$ است. زاویه های این مثلث را به دست آورید.

وارون توابع مثلثاتی

حل یک مسئله

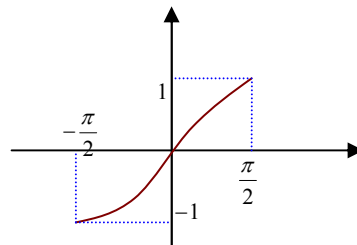
اگر طول وتر یک دایره را بدانیم، زاویه مرکزی روبروی آن چقدر است؟

در فعالیت زیر سعی خواهیم کرد این مسئله را حل کنیم.

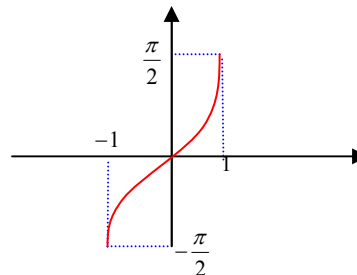
فعالیت

۱. در دایره واحد وتر دلخواهی به طول x رسم کنید. x در چه بازه ای تغییر می کند.
۲. زاویه مرکزی روبروی این وتر را روی شکل نمایش دهید و آن را θ بنامید. θ در چه بازه ای تغییر می کند.
۳. آیا x تابعی از θ است؟ این تابع چیست و دامنه و برد آن چیست؟ آیا این تابع یک به یک است؟
۴. آیا θ تابعی از x است؟ آیا می توانید فرمولی برای این تابع بنویسید؟

در فعالیت بالا متوجه می شویم که لازم است وارونی برای تابع $\sin x$ داشته باشیم، اما این تابع یک به یک نیست و در کل دامنه آن وارون پذیر نیست. اما این تابع روی دامنه های کوچکتر می تواند یک به یک و در نتیجه وارون پذیر باشد. بنا به قرارداد تابع $\sin x$ را روی بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ محدود می کنند که در این بازه صعودی و یک به یک است.



با این عمل تابعی یک به یک به دست می آید که دامنه آن $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ و برد آن $[-1, 1]$ است. وارون این تابع با $\sin^{-1} x$ نشان می دهند که تابعی صعودی با دامنه $[-1, 1]$ و برد $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ است و نمودار آن با قرینه یابی نمودار تابع $\sin x$ نسبت به نیمساز ربع اول به شکل زیر درمی آید.



غیرقابل استناد(نسخه اول)

توجه داشته باشید که $\sin^{-1} x$ را با $\frac{1}{\sin x}$ اشتباه نگیرید. اولی به معنای مقدار تابع وارون $\sin x$ در نقطه x است و دومی به معنای وارون مقدار $\sin x$ است و اینها با هم متفاوتند.

مثال: $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ زیرا $\frac{\pi}{6}$ زاویه ای در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ است و $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

مثال: مقدار $\sin^{-1}\left(\sin \frac{4\pi}{3}\right)$ را حساب می کنیم.

ابتدا داریم $\sin \frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. بنابراین مقدار $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ را باید حساب کنیم. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ زاویه ای است که سینوس آن $-\frac{1}{2}$ است و این زاویه در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ قرار دارد. این زاویه $-\frac{\pi}{3}$ است،

$$\text{پس } \sin^{-1}\left(\sin \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{4\pi}{3}$$

مثال: مقدار $\cos\left(\sin^{-1} \frac{3}{5}\right)$ را حساب می کنیم.

فرض کنید α آن زاویه ای باشد که در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ قرار دارد و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، یعنی $\sin^{-1} \frac{3}{5} = \alpha$. بنابراین باید $\cos \alpha$ را حساب کنیم. از آنجا که $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و α در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ قرار دارد، داریم:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{بنابراین: } \cos\left(\sin^{-1} \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

تمرین در کلاس

- مقدار $\sin^{-1} x$ را با زبان فارسی تشریح کنید.
- در دایره مثلثاتی مقدارهای x و $\sin^{-1} x$ را نشان دهید و روی شکل دامنه و برد این تابع را توضیح دهید.
- مقدارهای زیر را حساب کنید.

(الف) $\sin^{-1}(1)$	(ب) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$
(ج) $\sin^{-1}\left(\sin \frac{5\pi}{4}\right)$	(د) $\sin^{-1}\left(\cos \frac{\pi}{12}\right)$
- تابعی که زاویه مرکزی روبروی یک وتر را بر حسب طول وتر به دست می دهد بنویسید.

به طور مشابه برای تابع $\cos x$ نیز لازم است تابع وارونی به دست آوریم. در فعالیت زیر سعی خواهیم کرد این تابع وارون را بسازیم.

فعالیت

۱. آیا تابع $\cos x$ در کل دامنه آن وارون پذیر است؟
۲. با محدود کردن تابع $\cos x$ به بازه $[0, \pi]$ ، آیا تابع جدید یک به یک می شود؟ نظر خود را از طریق دایره مثلثاتی توضیح دهید.
۳. وارون این تابع محدود شده از $\cos x$ را با $\cos^{-1} x$ نشان می دهند. دامنه و برد $\cos^{-1} x$ را تعیین کنید و نمودار آن را رسم کنید.
۴. مقدار $\cos^{-1} x$ را به زبان فارسی تشریح کنید.

مثال: $\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ ، زیرا $\frac{2\pi}{3}$ زاویه ای در بازه $[0, \pi]$ است و $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

مثال: مقدار $\cos^{-1}(\cos(-\frac{4\pi}{3}))$ را حساب می کنیم.

ابتدا داریم $\cos(-\frac{4\pi}{3}) = \cos(-2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. بنابراین مقدار $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$ را باید حساب کنیم.

$\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$ زاویه ای است که کسینوس آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است و این زاویه در بازه $[0, \pi]$ قرار دارد. این زاویه

$\frac{\pi}{3}$ است، پس $\cos^{-1}(\cos(-\frac{4\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$.

مثال: مقدار $\sin(\cos^{-1}\frac{3}{5})$ را حساب می کنیم.

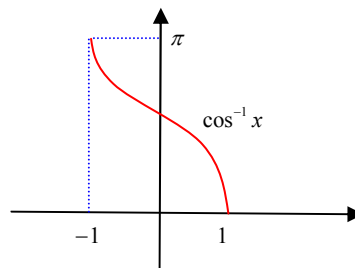
فرض کنید α آن زاویه ای باشد که در بازه $[0, \pi]$ قرار دارد و $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ، یعنی $\cos^{-1}\frac{3}{5} = \alpha$. بنابراین

باید $\sin \alpha$ را حساب کنیم. از آنجا که $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ و α در بازه $[0, \pi]$ قرار دارد، داریم:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

بنابراین: $\sin(\cos^{-1}\frac{3}{5}) = \frac{4}{5}$.

$\cos^{-1} x$ تابعی نزولی با دامنه $[-1, 1]$ و برد $[0, \pi]$ است و نمودار آن به شکل زیر خواهد بود.



تمرین در کلاس

۱. در دایره مثلثاتی x و $\cos^{-1} x$ را نمایش دهید و روی شکل دامنه و برد تابع $\cos^{-1} x$ را توضیح دهید.

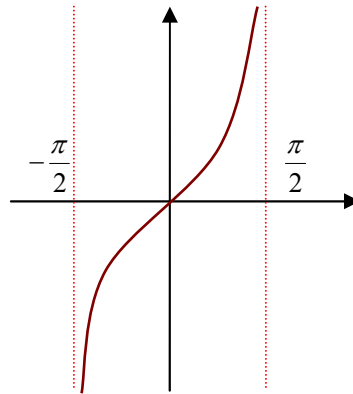
۲. مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $\cos^{-1}(-1)$ ب) $\sin^{-1}(\frac{3}{5}) + \cos^{-1}(\frac{3}{5})$

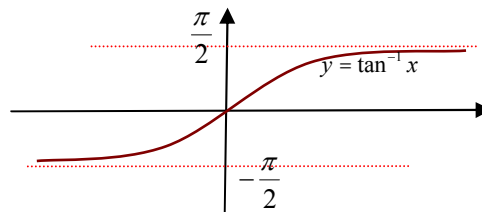
ج) $\cos^{-1}(\cos \frac{5\pi}{4})$ د) $\cos^{-1}(\sin \frac{\pi}{8})$

۳. در مثلثی که طول دو ضلع آن به طور ثابت ۳ و ۵ است، زاویه بین این دو ضلع تابعی از طول ضلع سوم است. این تابع را به دست آورید.

تابع تانژانت نیز به خاطر متناوب بودن در کل دامنه خود یک به یک نیست ولی اگر آن را به بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ محدود کنیم تابعی صعودی به دست می آید که یک به یک نیز خواهد بود و دارای وارون می باشد.



وارون این تابع را با $\tan^{-1} x$ نشان می دهند. دامنه این تابع کل \mathbb{R} است و برد آن بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ می باشد. با قرینه یابی نمودار $\tan x$ نسبت به نیمساز ربع اول، نمودار $\tan^{-1} x$ به شکل زیر خواهد بود.



غیرقابل استناد (نسخه اول)

برای هر x ، $\tan^{-1} x$ زاویه ای را نشان می دهد که در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ قرار دارد و تانژانت آن برابر x است.

مثال: $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ ، زیرا $-\frac{\pi}{4}$ زاویه ای در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ است و $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$.

مثال: مقدار $\tan^{-1}(\tan \frac{4\pi}{3})$ را حساب می کنیم.

ابتدا داریم $\tan \frac{4\pi}{3} = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ بنابراین مقدار $\tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})$ را باید حساب کنیم. $\tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})$

زاویه ای است که تانژانت آن $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است و این زاویه در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ قرار دارد. این زاویه $\frac{\pi}{3}$ است،

$$\text{پس } \tan^{-1}(\tan \frac{4\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$$

مثال: مقدار $\cos(\tan^{-1} \frac{3}{4})$ را حساب می کنیم.

فرض کنید α آن زاویه ای باشد که در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ قرار دارد و $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ ، یعنی $\tan^{-1} \frac{3}{4} = \alpha$ بنابراین

باید $\cos \alpha$ را حساب کنیم. از آنجا که $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ و α در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ قرار دارد، داریم:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{بنابراین: } \cos(\tan^{-1} \frac{3}{4}) = \frac{4}{5}$$



۱. برای هر x ، در دایره مثلثاتی x و $\tan^{-1} x$ را نمایش دهید و روی شکل دامنه و برد تابع

$\tan^{-1} x$ را توضیح دهید.

۲. مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ ب) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) + \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$

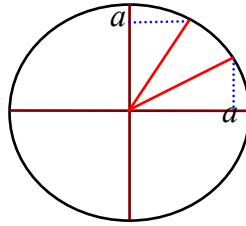
ج) $\tan^{-1}(\tan \frac{5\pi}{4})$ د) $\sin^{-1}(\tan \frac{\pi}{8})$

۳. آیا تابع $y = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ وارون پذیر است؟ تابع وارون آن چیست؟

مسائل

۱. برای هر عدد $0 < a < 1$ از طریق شکل زیر استدلال کنید که

$$\sin^{-1} a + \cos^{-1} a = \frac{\pi}{2}$$



در حالت $-1 < a < 0$ با استدلال مشابه درستی تساوی بالا را ثابت کنید.

۲. از طریق دایره مثلثاتی نشان دهید که برای هر $-1 \leq x \leq 1$ داریم:

$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$$

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$$

۳. برای هر $-1 \leq x \leq 1$ از طریق دایره مثلثاتی نشان دهید:

$$\sin(\cos^{-1} x) = \cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$$

۴. برای هر x نشان دهید:

$$\sin(\tan^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \cos(\tan^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

۵. در مورد فرد یا زوج بودن توابع $\tan^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\sin^{-1} x$ چه می توان گفت؟

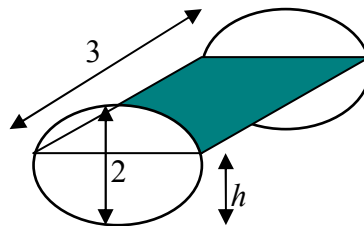
۶. برای هر عدد مثبت x نشان دهید $\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x}$ زاویه ای در بازه $(0, \pi)$ است و با

محاسبه سینوس یا کسینوس این زاویه نتیجه بگیرید:

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

۷. یک منبع گازوئیل به شکل استوانه در اختیار داریم که به شکل خوابیده روی زمین قرار دارد.

قطر دایره قاعده آن ۲ متر و ارتفاع آن (که به طور افقی روی زمین است) ۳ متر است.



الف) اگر حجم گازوئیل موجود در منبع (بر حسب سانتی متر مکعب) را با V و ارتفاع گازوئیل موجود

در منبع (بر حسب سانتی متر) را با h نشان دهیم، V تابعی از h است و این تابع را محاسبه کنید و

دامنه و برد آن را تعیین کنید.

ب) h نیز تابعی از V است، این تابع را محاسبه کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید.